

## 1 長方形の上の重積分

長方形  $K = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  で定義された関数  $f(\mathbf{x}) = f(x, y)$  の  $K$  上の重積分  $\iint_K f(x, y) dx dy$  を定義したい.

$$\bullet \Delta = \left\{ \begin{array}{l} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = d \end{array} \right\} \text{ によって長方形 } K \text{ を}$$

小長方形  $K_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  ( $i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$ ) の集まりに分割する.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$  とすると,  $K_{ij}$  の面積は  $\mu(K_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$ .

$|\Delta| = \max_{i,j} (K_{ij} \text{ の対角線の長さ})$  を分割  $\Delta$  の幅とよぶ.

• 各  $K_{ij}$  から代表点  $\mathbf{p}_{ij}$  を選ぶ.

$$\bullet R[f, \Delta, \{\mathbf{p}_{ij}\}] = \sum_{ij} f(\mathbf{p}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \text{ をリーマン和とよぶ.}$$

**定義**  $f$  が  $K$  で重積分可能とは, リーマン和  $R[f, \Delta, \{\mathbf{p}_{ij}\}]$  が  $|\Delta| \rightarrow 0$  のとき (代表点  $\{\mathbf{p}_{ij}\}$  のとり方に依らず) ある値に近づくことをいう. このときの極限値を  $\iint_K f dx dy$  で表わす.

• 重積分可能性を少し違う形で表わしたい.

そのために  $m_{ij} = \inf_{\mathbf{x} \in K_{ij}} f(\mathbf{x})$ ,  $M_{ij} = \sup_{\mathbf{x} \in K_{ij}} f(\mathbf{x})$  として

$$s[f, \Delta] = \sum_{ij} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \quad S[f, \Delta] = \sum_{ij} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

を不足和, 過剰和とよぶ. このとき  $s[f, \Delta] \leq R[f, \Delta, \{\mathbf{p}_{ij}\}] \leq S[f, \Delta]$ .

長方形  $K$  のあらゆる分割  $\Delta$  に関する不足和の上限, 過剰和の下限

$$s[f] = \sup_{\Delta} s[f, \Delta], \quad S[f] = \inf_{\Delta} S[f, \Delta]$$

を下積分, 上積分という.  $s[f] \leq S[f]$ .

**定理**  $f$  が  $K$  で重積分可能であるためには  $s[f] = S[f]$  となることが必要十分である. このとき  $\iint_K f dx dy = s[f] = S[f]$ .

**定理**  $f$  が  $K$  で連続ならば重積分可能である.

## 2 一般の有界集合上の重積分

- $E$  を有界集合  $\subset \mathbf{R}^2$  とし,  $f$  を  $E$  上の有界関数とする.

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in E) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin E) \end{cases}$$

として,  $E$  上の重積分を次で定める (右辺が意味をもてば):

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_K \tilde{f}(x, y) dx dy.$$

- 有界集合  $E$  の面積  $\mu(E)$  を次で定義する (右辺が意味をもてば):

$$\mu(E) = \iint_E dx dy = \iint_K \varphi_E(x, y) dx dy$$

$$\text{ここで } \varphi_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in E) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin E). \end{cases} \quad (\text{集合 } E \text{ の定義関数})$$

面積が定義できる集合を, 面積確定であるとよぶ.

**定理** 面積確定な集合の上で連続な関数は重積分可能である.

## 3 累次積分

**定義** 縦線領域:  $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ .

ただし,  $\varphi_1, \varphi_2$  は  $[a, b]$  で連続で  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ .

横線領域:  $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ .

ただし,  $\psi_1, \psi_2$  は  $[c, d]$  で連続で  $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ .

**定理**  $f$  が縦線領域  $E$  上の連続関数とすると

$$(1) \quad \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \text{ は } x \in [a, b] \text{ の連続関数.}$$

$$(2) \quad f \text{ は } E \text{ で重積分可能で } \iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

(注) これを  $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$  と書いてもよい.

- 特に,  $f$  が長方形  $K = [a, b] \times [c, d]$  上の連続関数のとき

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

- $x, y$  の役割を入れ替えて, 横線領域についても同様のことがいえる.

## 4 三重積分の計算

$V$  を 3 次元空間  $\mathbf{R}^3$  の集合とする.  $V$  上の 3 重積分を, 累次積分 (1 変数の積分と 2 重積分の組み合わせ) に帰着する方法を示す.

(ア)  $V$  を線分の集まり (縦線領域) とみなす.

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in E, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$$

ここで  $E$  は  $\mathbf{R}^2$  の集合,  $\varphi_1, \varphi_2$  は  $E$  で連続で  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ .

• このとき

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_E \left( \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

(イ)  $V$  を面分の集まりとみなす.

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid p \leq z \leq q, (x, y) \in E_z\}$$

ここで,  $E_z$  は集合  $V$  の, 平面  $z = (\text{定数})$  による切り口.

• このとき

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \iint_{E_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

## 演習

[1] 重積分の値を求めよ:

$$(1) \quad \iint_K (x + 2y) dx dy, \quad K = [0, 2] \times [0, 3]$$

$$(2) \quad \iint_K ye^{xy} dx dy, \quad K = [0, 2] \times [0, 3]$$

(ヒント: (2)  $\int_0^3 dy \int_0^2 ye^{xy} dx$  を計算する.  $\int_0^2 dx \int_0^3 ye^{xy} dy$  とするとどうなるか?)

[2] 集合  $E$  を図示し, 重積分の値を求めよ:

$$(1) \quad \iint_E y dx dy, \quad E = \{x \leq y, y^2 \leq x\}$$

$$(2) \quad \iint_E xy dx dy, \quad E = \{x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 1\}$$

3 3次元空間  $\mathbf{R}^3$  において  $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq a\}$  とする.

(1)  $V$  を図示せよ.

(2)  $\iiint_V dx dy dz$  の値を求めよ.

4 閉区間  $[a, b]$  で連続な関数  $f, g$  に関するシュワルツの不等式

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx$$

を, 重積分  $\iint_K \{f(x)g(y) - g(x)f(y)\}^2 dx dy$  を考察することによって, 示せ.

## 宿題

1月10日(火) 11:00 までに, 全学共通科目レポートボックスに提出

1 次の重積分の値を求めよ

(1)  $\iint_K \cos(x+y) dx dy, \quad K = [0, \pi/2]^2$

(2)  $\iint_E xy dx dy, \quad E = \{(x-2)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$

(3)  $\iint_E x^2 e^{y^2} dx dy, \quad E = \{0 \leq x \leq y \leq 1\}$

2  $n$ 次元空間  $\mathbf{R}^n$  において

$$V_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq a\} \quad (a > 0)$$

とする. 次を示せ:

$$\int \dots \int_{V_n(a)} dx_1 \dots dx_n = \frac{a^n}{n!}.$$

3 (1) 写像  $(\rho, \phi, z) \mapsto (x, y, z)$  を

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

で定める (円柱座標, 円筒座標). このヤコビ行列, ヤコビ行列式を計算せよ.

(2) 写像  $(r, \theta, \phi) \mapsto (\rho, \phi, z)$  を

$$\rho = r \sin \theta, \quad \phi = \phi, \quad z = r \cos \theta$$

で定める. このヤコビ行列, ヤコビ行列式を計算せよ.

(3) 写像 (2), (1) の合成写像  $(r, \theta, \phi) \mapsto (x, y, z)$  は

$$x = r \sin \theta, \quad \phi = \phi, \quad z = r \cos \theta$$

で定まる (空間極座標). 連鎖律を用いて, ヤコビ行列, ヤコビ行列式を計算せよ.