

宿題解答例

- 1 曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ.

(解答例) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ とおくと, $f_x = \frac{2x}{a^2}$, $f_y = \frac{2y}{b^2}$, $f_z = \frac{2z}{c^2}$.

したがって接平面の方程式は

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0.$$

点 $f(x_0, y_0, z_0) = 1$ であることを用いてこれを書き直せば

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

となる.

- 2 次の $\mathbf{R}^2$ 上の関数について問に答えよ.

(i) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$,

(ii) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$.

(1) f の 1 次および 2 次偏導関数を求めよ.

(2) f の停留点を求めよ.

(3) 上で求めた停留点で f が極値をとるかどうかが調べよ.

(4) f が最大値, 最小値をとるかどうかが調べよ.

(解答例) : (i)

(1) $f_x = 4x^3 - 2x - 2y$, $f_y = 4y^3 - 2x - 2y$

$$f_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = -2, \quad f_{yy} = 12y^2 - 2$$

(2) $f_x = 0, f_y = 0$ となるのは $(x, y) = (0, 0), (1, 1), (-1, -1)$.

(3) (ア) 点 $(1, 1)$ において, $H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 10 \cdot 10 - (-2)^2 = 96 > 0$ また $f_{xx} > 0$.

よって f はここで (狭義) 極小値 -2 をとる.

(イ) 点 $(-1, -1)$ についても (ア) と同様. f は (狭義) 極小値 -2 をとる.

(ウ) 点 $(0, 0)$ において, $H = (-2) \cdot (-2) - (-2)^2 = 0$.

これだけからは極値をとるかどうかが判定できないので, f を少し詳しく観察する:

まず, $f(t, t) = 2t^4 - 4t^2 = 2t^2(t^2 - 2)$ だから $0 < |t| < \sqrt{2}$ のとき $f(t, t) < 0$.

また, $f(t, -t) = 2t^4$ だから $t \neq 0$ のとき $f(t, -t) > 0$.

これより, $(0, 0)$ のどんな小さな近傍をとっても, その中に $f > 0$ なる点も $f < 0$ なる点も存在することがわかる. よって $(0, 0)$ において f は極値をとらない.

(4) 最大値について：

(解1) f は上に有界ではない。(たとえば $f(x, 0) = x^4 - x^2$ はどんなに大きな実数値もとる。) したがって最大値をとる点は存在しない。

(解2) f がある点で最大値をとるなら、それは極大値でもある。(3) で見たように極大値をとる点は存在しないから、最大値をとる点も存在しない。

最小値について：

(解1) この関数は

$$f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + (x - y)^2 - 2$$

と書きなおせる。よってつねに $f(x, y) \geq -2$ で、 $f(x, y) = -2$ となるのは $(x, y) = (1, 1), (-1, -1)$ のときである。よって f はこの2点において最小値 -2 をとる。(このことから、 f がこの2点で狭義極小値をとることが、(3)によらず、わかる。)

(解2) まず $x^2 + y^2 \geq 4$ のとき $f(x, y) \geq 0$ であることを示す。実際

$$x^4 + y^4 = \frac{1}{2}\{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)^2\} \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\{(x + y)^2 + (x - y)^2\} \geq \frac{1}{2}(x + y)^2$$

だから

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$$

よって $x^2 + y^2 \geq 4$ のとき $f(x, y) \geq 0$ 。

集合 $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ を考える。 E は有界閉集合だから、 f の E における最小値をとる点が存在する。その値は -2 以下である。 $(-2$ という値をとる点が E 内にあるから。) E に属さない点では $f \geq 0$ だから E における最小値は $\mathbf{R}^2$ 全体での最小値でもある。それは極小値でもあるから、(3)により f は $(1, 1), (-1, -1)$ で最小値をとる。

(ii)

$$(1) \quad f_x = \cos x + \cos(x + y), \quad f_y = \cos y + \cos(x + y)$$

$$f_{xx} = -\sin x - \sin(x + y), \quad f_{xy} = f_{yx} = -\sin(x + y), \quad f_{yy} = -\sin y - \sin(x + y),$$

(2) $f_x = 0, f_y = 0$ となる点を求める。 x, y を 2π の整数倍移動しても f は不変だから、まず $0 \leq x, y < 2\pi$ の範囲で考える。 $\cos x = \cos y$ より (i) $y = x$ または (ii) $y = 2\pi - x$ 。

(i) のとき $f_x = 0$ より $\cos x + \cos 2x = 0$ これから $\cos x = -1, 1/2$ 。

(ii) のとき $f_x = 0$ より $\cos x = -1$ 。

したがって $f_x = f_y = 0$ となる点は、(ア) (π, π) , (イ) $(\pi/3, \pi/3)$, (ウ) $(5\pi/3, 5\pi/3)$, およびこれらを x, y 方向に 2π の整数倍移動した点。

(3) (ア) では、 $H = 0$ であるが $f(t, t) = 2\sin t + \sin 2t = 2\sin t(1 + \cos t)$ は $t = 0$ のまわりで正の値も負の値もとるので極値ではない。

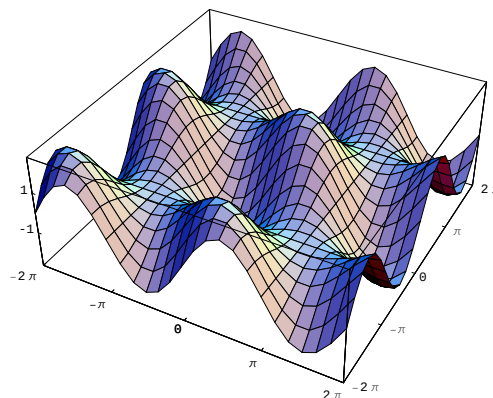
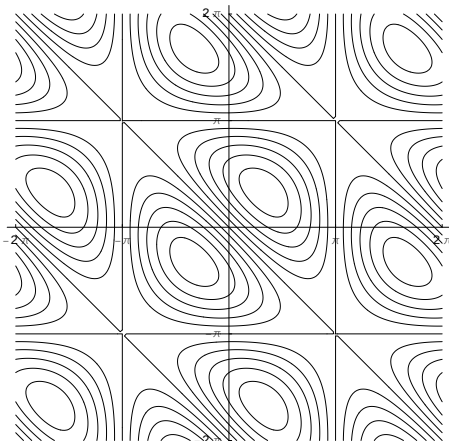
(イ) では、 $H = (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) - (\sqrt{3}/2)^2 > 0, f_{xx} < 0$ より狭義極大値。

(ウ) では同様に、狭義極小値をとる。

まとめると, $((2m+1/3)\pi, (2n+1/3)\pi)$ で狭義極大値 $3\sqrt{3}/2$ を, $((2m+5/3)\pi, (2n+5/3)\pi)$ で狭義極小値 $-3\sqrt{3}/2$ をとる.

(4) まず f が $\mathbf{R}^2$ における最大値・最小値をとる点が存在することを示そう. 集合 $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ を考える. E は有界閉集合だから, $f(x, y)$ の, E における最大値・最小値をとる点が存在する. f が x についても y についても周期 2π をもつから, これらの点で $\mathbf{R}^2$ 全体での最大値・最小値をとる.

最大最小値をとる点は, 極値をとる点でもあるから, 最大値をとる点は $((2m+1/3)\pi, (2n+1/3)\pi)$, 最小値をとる点は $((2m+5/3)\pi, (2n+5/3)\pi)$ である.



3 $f(x, y, z)$ は $\mathbf{R}^3$ の領域で定義された C^1 級関数とする.

ある点 $\mathbf{a} = (a, b, c)$ において $f_x(\mathbf{a}) \neq 0$, $f_y(\mathbf{a}) \neq 0$, $f_z(\mathbf{a}) \neq 0$ とする. 3変数 x, y, z が $f(x, y, z) = 0$ という関係を満たしながら変化するとき, $\mathbf{a}$ の近くでは x を y, z の関数, y を z, x の関数, z を x, y の関数とみなすことができる. このとき次が成り立つことを示せ:

$$(1) \quad \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = 1$$

$$(2) \quad \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1 \quad (1 \text{ ではない!}).$$

(解答例)

$p = f_x(\mathbf{a})$, $q = f_y(\mathbf{a})$, $r = f_z(\mathbf{a})$, とおくと, 陰関数定理により

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{q}{p}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{r}{p}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{r}{q}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{p}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{q}{r}$$

これから容易に (1), (2) が導かれる.

(注) $\mathbf{a} = (a, b, c)$ における接平面の方程式は

$$p(x - a) + q(y - b) + r(z - c) = 0$$

で与えられる. これは次のように表わすこともできる.

$$\begin{aligned} x &= a - \frac{q}{p}(y - b) - \frac{r}{p}(z - c) \\ y &= b - \frac{q}{p}(x - a) - \frac{r}{p}(z - c) \\ z &= c - \frac{p}{r}(x - a) - \frac{q}{r}(y - b) \end{aligned}$$