微分積分学 B 演義 (S2, S6)　No.5　　　2016 年 12 月 15 日

演習解答例

$\boxed{1}$　2 次関数 $f(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ を考える．$H = \alpha\gamma - \beta^2$ とする．

(1) $\alpha \neq 0$ ならば f が次の形に書けることを示せ：

$$f(x,y) = \alpha\left(x + \boxed{}\,y\right)^2 + \boxed{}\,y^2$$

(2) 次を示せ：

・ $H > 0,\ \alpha > 0 \implies f$ は $(0,0)$ で狭義最小値をとる．

・ $H > 0,\ \alpha < 0 \implies f$ は $(0,0)$ で狭義最大値をとる．

・ $H < 0 \implies f$ は $(0,0)$ で極値をとらない．（f は 1 次式の積に分解できる．）

(解答例)

(1)
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \alpha(x^2 + \frac{2\beta}{\alpha}xy) + \gamma y^2 \\ &= \alpha\Big(x + \frac{\beta}{\alpha}y\Big)^2 + \Big(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}\Big)y^2 \\ &= \alpha\Big(x + \frac{\beta}{\alpha}y\Big)^2 + \frac{H}{\alpha}y^2 \end{aligned}$$

(2) （ア） $H > 0,\ \alpha > 0$ のとき，$H/\alpha > 0$ だから，つねに $f(x,y) \geq 0$ で，$f(x,y) = 0$ となるのは $(x,y) = (0,0)$ のときに限られる．したがって f は $(0,0)$ で狭義最小値 0 をとる．

（イ）$H > 0,\ \alpha < 0$ のとき，$H/\alpha < 0$ だから，つねに $f(x,y) \leq 0$ で，$f(x,y) = 0$ となるのは $(x,y) = (0,0)$ のときに限られる．したがって f は $(0,0)$ で狭義最大値 0 をとる．

（ウ） $H < 0$ のとき，$\alpha \neq 0$ ならば

$$f(x,y) = \alpha\Big(x + \frac{\beta + \sqrt{-H}}{\alpha}y\Big)\Big(x + \frac{\beta - \sqrt{-H}}{\alpha}y\Big)$$

と因数分解できる．また $\alpha = 0$ ならば

$$f(x,y) = (2\beta x + \gamma y)y$$

と因数分解できる．（このとき $H = -\beta^2$ が負だから $\beta \neq 0$ であることに注意する．）

いずれの場合も，$(0,0)$ のどんなに小さな近傍を考えても，その中に $f(x,y) > 0$ となる点も，$f(x,y) < 0$ となる点も存在する．したがって $(0,0)$ において f は極値をとらない．

$\boxed{2}$　次の関数が最大・最小値，極値をとる点を（存在すれば）求めよ：

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

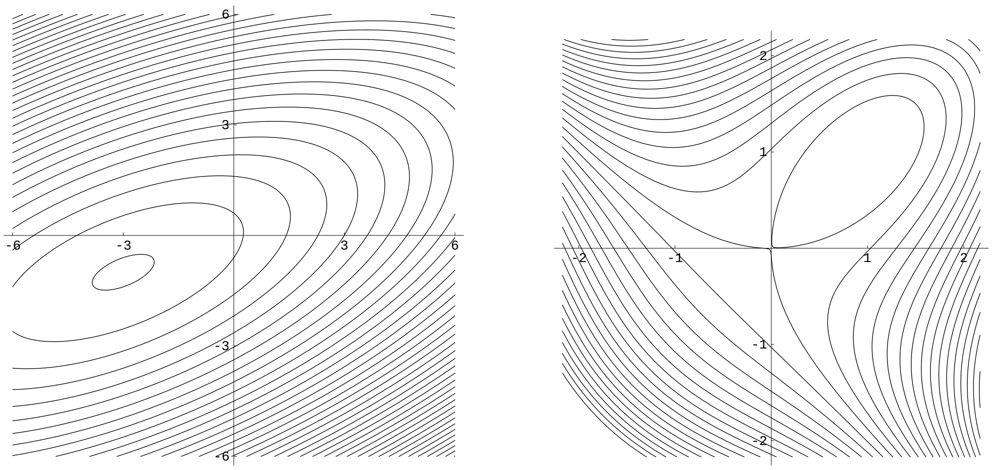
（解答例）　$f_x = 2x - 2y + 4,\ f_y = -2x + 6y$ だから f の停留点は $(-3,-1)$ のみである．極値，最大・最小値をとる可能性があるのはこの点に限られる．ところで

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + (4-2y)x + 3y^2 \\ &= (x + 2 - y)^2 + 3y^2 - (2-y)^2 \\ &= (x + 2 - y)^2 + 2(y+1)^2 - 6 \end{aligned}$$

だから，つねに $f(x,y) \geq -6$ で，$f(x,y) = -6$ となるのは $x+2-y=0$ かつ $y+1=0$ のとき，すなわち $(x,y) = (-3-1)$ のときのみ．

したがって f は $(-3,-1)$ において狭義最小値をとる（これは狭義極小値でもある）．

極大値をとる点，最大値をとる点は存在しない．



$\boxed{3}$ 関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2$ を考える．

(1) f の 1 次および 2 次偏導関数を求めよ．

(2) 点 $(1,2)$ における f の等高線の接線の方程式を求めよ．

(3) 点 $(1,2)$ の周りで f を近似する 2 次式を求めよ．

(4) f の停留点を求めよ．

（解答例）

(1) $\quad f_x = 3x^2 - 3y, \quad f_y = 3y^2 - 3x,$

$\quad f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = f_{yx} = -3, \quad f_{yy} = 6y$

(2) $\quad -3(x-1) + 9(y-2) = 0$

(3) $\quad z = 3 - 3(x-1) + 9(y-2) + \dfrac{1}{2}\Big\{6(x-1)^2) - 6(x-1)(y-2) + 12(y-2)^2\Big\}$

(4) f の停留点は $f_x = 0,\ f_y = 0$ を同時に満たす点だから，$(0,0),\ (1,1)$．

（注） $H = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2$ とする．

$(0,0)$ においては $H = -9 < 0$ だから $(0,0)$ は鞍点．f はここで極値をとらない．

$(1,1)$ においては $H = 27 > 0, f_{xx} = 6 > 0$. よって f は $(1,1)$ で狭義極小値をとる．

極大値をとる点はない．よって最大値をとる点はない．

また f の値域は $\mathbf{R}$ 全体である．から最小値をとる点も存在しない．(点 $(1,1)$ で f は極小だが最小ではない.)