微分積分学B 演義 (S2, S6) No.5　　2016年12月15日

1　陰関数定理

定理　（２変数関数で定まる陰関数）D を $\mathbf{R}^2$ の領域，f を D で C^1 級の関数とする．$\boldsymbol{a} = (a,b) \in D$，$f_x(\boldsymbol{a}) \neq 0$, $f(\boldsymbol{a}) = c$ とするとき，区間 $I = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $J = (b-\delta, b+\delta)$ および C^1 級関数 $\varphi : I \to J$ がとれて次が成り立つ：

(i) $I \times J \subset D$,

(ii) $\{(x,y) \in I \times J \mid f(x,y) = c\} = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in I\}$,

(iii) $\varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \quad (x \in I,\ y = \varphi(x))$.

定理　（等位線の接線）　点 $\boldsymbol{a} = (a,b) \in D$ が停留点でないとき（すなわち $f_x(\boldsymbol{a})$, $f_y(\boldsymbol{a})$ の少なくとも一方が 0 でないとき），$\boldsymbol{a}$ を通る等位線の接線は次式で与えられる：

$$f_x(\boldsymbol{a})(x-a) + f_y(\boldsymbol{a})(y-b) = 0.$$

定理　（３変数関数で定まる陰関数）　D を３次元空間 $\mathbf{R}^3$ の領域，$f(x,y,z)$ を D で C^1 級の関数とする．$\boldsymbol{a} = (a,b,c) \in D$，$f_z(\boldsymbol{a}) \neq 0$, $f(\boldsymbol{a}) = k$ とするとき，(a,b) の近傍 U ，区間 $J = (c-\delta, c+\delta)$ および C^1 級関数 $\varphi : U \to J$ がとれて次が成り立つ：

(i) $U \times J \subset D$,

(ii) $\{(x,y,z) \in U \times J \mid f(x,y,z) = k\} = \{(x,y,\varphi(x,y)) \mid (x,y) \in U\}$,

(iii) $\varphi_x(x,y) = -\dfrac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}, \quad \varphi_y(x,y) = -\dfrac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)} \qquad ((x,y) \in U,\ z = \varphi(x,y))$.

定理　（等位面の接平面）点 $\boldsymbol{a} = (a,b,c) \in D$ が停留点でないとき（すなわち $f_x(\boldsymbol{a})$, $f_y(\boldsymbol{a})$, $f_z(\boldsymbol{a})$ の少なくとも一方が 0 でないとき），$\boldsymbol{a}$ を通る等位面の接平面は次式で与えられる：

$$f_x(\boldsymbol{a})(x-a) + f_y(\boldsymbol{a})(y-b) + f_z(\boldsymbol{a})(z-c) = 0.$$

2　２変数のテイラーの定理

１変数関数のテイラー近似と同じように，２変数関数 $f(x,y)$ を点 (a,b) の周りで（n 次）多項式で

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{i+j \le n} c_{ij}(x-a)^i(y-b)^j + o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|^n) \\ &= c_{00} + c_{10}(x-a) + c_{01}(y-b) \\ &\quad + c_{20}(x-a)^2 + c_{11}(x-a)(y-b) + c_{10}(y-b)^2 + \cdots \end{aligned}$$

のように近似することができる．このときの係数 c_{ij} は $\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i \partial y^j}(\boldsymbol{a})$ となる．

記述を簡単にするため次のように表す：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}=(a,b), \quad \boldsymbol{h}=(h,k)\\
&\boldsymbol{x}=(x,y)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}=(a+h,b+k)
\end{aligned}$$

定理 （２変数のテイラーの定理）f は領域 $D\in\mathbf{R}^2$ で C^n 級の関数，$\boldsymbol{a}=(a,b)\in D$ とする．

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) &= \sum_{i+j\leq n}\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial y^j}(\boldsymbol{a})h^ik^j+R_n(\boldsymbol{h})\\
&= \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{\partial^r f}{\partial x^i\partial y^{r-i}}(\boldsymbol{a})h^ik^{r-i}+R_n(\boldsymbol{h}), \quad R_n(\boldsymbol{h})=o(|\boldsymbol{h}|^n).
\end{aligned}$$

これを次のように表すこともできる：

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^r f(\boldsymbol{a})+R_n(\boldsymbol{h})$$

3　最大最小と極大極小

平面 $\mathbf{R}^2$ の領域 D で定義された関数 $f(x,y)$ を考える．

定義 f が $\boldsymbol{a}$ で最大値をとる $\iff \forall\boldsymbol{x}\in D,\ f(\boldsymbol{x})\leqq f(\boldsymbol{a})$.

f が $\boldsymbol{a}$ で狭義最大値をとる $\iff \forall\boldsymbol{x}\in D\setminus\{\boldsymbol{a}\},\ f(\boldsymbol{x})<f(\boldsymbol{a})$.

f が $\boldsymbol{a}$ で極大値をとる $\iff \exists U(\boldsymbol{a}$ の近傍$), \forall\boldsymbol{x}\in U,\ f(\boldsymbol{x})\leqq f(\boldsymbol{a})$.

f が $\boldsymbol{a}$ で狭義極大値をとる $\iff \exists U(\boldsymbol{a}$ の近傍$), \forall\boldsymbol{x}\in U\setminus\{\boldsymbol{a}\},\ f(\boldsymbol{x})<f(\boldsymbol{a})$.

＊ 最小，狭義最小，極小，狭義極小についても同様に定義する．

f が $\boldsymbol{a}$ で最大値をとるとき，$\boldsymbol{a}$ は f の最大点であるという．他も同様．

最大点は極大点でもあるが極大点が最大点とは限らない．極大は，ある点の近くだけを考えたときの最大．

定理 C^1 級関数 f が点 $\boldsymbol{a}$ で極値をとるならば，$\boldsymbol{a}$ は f の停留点 (stationary point, または臨界点 critical point) である．すなわち $f_x(\boldsymbol{a})=0$ かつ $f_y(\boldsymbol{a})=0$.

定理 （２次関数の場合）２変数の２次関数 $f(x,y)=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2$ について， $H=\alpha\gamma-\beta^2$ とおく．

(1) $H>0$ かつ $\alpha>0$ ならば f は 0 で狭義最小値をとる．

(2) $H>0$ かつ $\alpha<0$ ならば f は 0 で狭義最大値をとる．

(3) $H<0$ （鞍点）ならば 0 は極大点でも極小点でもない．

定理 $f(x,y)$ を領域 D で C^2 級の関数とする．点 $\boldsymbol{a}$ は f の停留点であるとし，

$$\alpha = f_{xx}(\boldsymbol{a}), \quad \beta = f_{xy}(\boldsymbol{a}), \quad \gamma = f_{yy}(\boldsymbol{a}), \quad H = \alpha\gamma - \beta^2$$

とおく．

(1) $H > 0$ かつ $\alpha > 0$ ならば f は $\boldsymbol{a}$ で 狭義極小値をとる．

(2) $H > 0$ かつ $\alpha < 0$ ならば f は $\boldsymbol{a}$ で 狭義極大値をとる．

(3) $H < 0$ （鞍点）ならば $\boldsymbol{a}$ は f の 極大点でも極小点でもない．

注 停留点 $\boldsymbol{a}$ の周りでは f は次式は

$$f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\left\{\alpha(x-a)^2 + 2\beta(x-a)(y-b) + \gamma(y-b)^2\right\}$$

で近似される．

演習

$\boxed{1}$ 2次関数 $f(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ を考える．$H = \alpha\gamma - \beta^2$ とする．

(1) $\alpha \neq 0$ ならば f が次の形に書けることを示せ：

$$f(x,y) = \alpha\left(x + \boxed{}\, y\right)^2 + \boxed{}\, y^2$$

(2) 次を示せ：

・ $H > 0,\ \alpha > 0 \implies f$ は $(0,0)$ で狭義最小値をとる．

・ $H > 0,\ \alpha < 0 \implies f$ は $(0,0)$ で狭義最大値をとる．

・ $H < 0 \implies f$ は $(0,0)$ で極値をとらない．（f は1次式の積に分解できる．）

$\boxed{2}$ 次の関数が最大・最小値，極値をとる点を（存在すれば）求めよ：

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

（ヒント：まず，停留点がどこにあるかを調べる．）

$\boxed{3}$ 関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2$ を考える．

(1) f の1次および2次偏導関数を求めよ．

(2) 点 $(1,2)$ における f の等高線の接線の方程式を求めよ．

(3) 点 $(1,2)$ の周りで f を近似する2次式を求めよ．

(4) f の停留点を求めよ．

宿題　12 月 20 日（火）11:00 までに，全学共通科目レポートボックスに提出

$\boxed{1}$ 曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ.

$\boxed{2}$ 次の $\mathbf{R}^2$ 上の関数について問に答えよ.

(i) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$,

(ii) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$.

(1) f の 1 次および 2 次偏導関数を求めよ.

(2) f の停留点を求めよ.

(3) 上で求めた停留点で f が極値をとるかどうか調べよ.

(4) f が最大値，最小値をとるかどうか調べよ.

$\boxed{3}$ $f(x,y,z)$ は $\mathbf{R}^3$ の領域で定義された C^1 級関数とする.

ある点 $\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ において $f_x(\boldsymbol{a})\neq 0$, $f_y(\boldsymbol{a})\neq 0$, $f_z(\boldsymbol{a})\neq 0$ とする. 3 変数 x,y,z が $f(x,y,z)=0$ という関係を満たしながら変化するとき，$\boldsymbol{a}$ の近くでは x を y, z の関数，y を z, x の関数，z を x, y の関数とみなすことができる. このとき次が成り立つことを示せ:

(1) $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x}=1,\quad \dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}=1,\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial z}=1$

(2) $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$　　(1 ではない！).