

宿題解答例

- 1 (u, v) 平面から (x, y) 平面への写像を次のように定める：

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv.$$

- (1) この写像のヤコビ行列を求めよ。

- (2) 関数 $z = f(x, y)$ を (u, v) の関数とみなすとき, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を用いて $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ を表わせ。

(解答例)

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}.$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = 2u \frac{\partial z}{\partial x} + 2v \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = -2v \frac{\partial z}{\partial x} + 2u \frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned}$$

- 2 α を実数として, 次の 3 変数関数を考える：

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}.$$

- (1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ および $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を計算せよ。
 (2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ が成り立つときの α の値を求めよ。

(解答例) 式を見やすくするために $s = x^2 + y^2 + z^2$ とおく。

$$(1) \quad \begin{aligned} f_x &= 2\alpha s^{\alpha-1} x \\ f_{xx} &= 2\alpha s^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)s^{\alpha-2}x^2 \end{aligned}$$

- (2) f_{yy}, f_{zz} も同様に計算できる。

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} &= 6\alpha s^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)s^{\alpha-2}(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= (4\alpha^2 + 2\alpha)s^{\alpha-1} \end{aligned}$$

よって, f が与えられた方程式 (ラプラス方程式) を満たすのは $\alpha = 0, -1/2$ のときである。

- 3 (1) $z = f(x, y)$ を $\mathbf{R}^2$ 上の C^1 級関数とする. 写像 $\varphi: (u, v) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (x, y) \in \mathbf{R}^2$ を $x = u, y = u+v$ によって, z を u, v の関数とみなすとき, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を用いて $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ を表わせ。
 (2) X さんの質問:「 $x = u$ だから変数 x と変数 u は同じもののはずです. 同じ変数で偏微分したのに $\frac{\partial z}{\partial x}$ と $\frac{\partial z}{\partial u}$ が違うのはなぜですか?」 X さんが納得するように説明してあげてください。

(解答例)

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}$ は (x, y) を独立変数の組 (座標系) と考え、 y を固定して x を動かして微分したものを表わしている. 一方、 $\frac{\partial z}{\partial u}$ は (u, v) を独立変数と考え、 v を固定して u を動かして微分したものを表わしている. v を固定して u を動かせば、 x, y の両方が動くので $\frac{\partial z}{\partial u}$ は $\frac{\partial z}{\partial x}$ とは違うものになる. x と u は同じものだが、組になるもうひとつの変数が異なるので $\frac{\partial z}{\partial x}$ と $\frac{\partial z}{\partial u}$ は違う意味をもつ.

[4] f は平面 $\mathbf{R}^2$ で C^1 級の関数とする. 定数 M があって、 $\mathbf{R}^2$ の各点 $\mathbf{x} = (x, y)$ で

$$\sqrt{f_x(\mathbf{x})^2 + f_y(\mathbf{x})^2} \leq M$$

が成り立っているとする. $\mathbf{R}^2$ の任意の2点 $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ について不等式

$$|f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)| \leq M|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$$

が成り立つことを示せ.

(解答例) 点 $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ を結ぶ線分を $\varphi(t) = (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2$ ($t \in [0, 1]$) で表わすと、

$$\varphi(0) = \mathbf{x}_1, \quad \varphi(1) = \mathbf{x}_2, \quad \varphi'(t) = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1.$$

合成関数 $F(t) = f(\varphi(t))$ ($t \in [0, 1]$) について次が成り立つ.

$$F(0) = f(\mathbf{x}_1), \quad F(1) = f(\mathbf{x}_2), \quad F'(t) = f_x(\varphi(t))(x_2 - x_1) + f_y(\varphi(t))(y_2 - y_1).$$

平均値定理により $F(1) - F(0) = F'(\theta)$ を満たす θ ($0 < \theta < 1$) が存在することがわかる. したがって次が成り立つ:

$$f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) = f_x(\varphi(\theta))(x_2 - x_1) + f_y(\varphi(\theta))(y_2 - y_1)$$

Schwarz の不等式 (Cauchy-Schwarz の不等式) により、右辺の絶対値は

$$\sqrt{f_x(\varphi(\theta))^2 + f_y(\varphi(\theta))^2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

でおさえられる. これは $M|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ でおさえられるから、問題の不等式が成り立つ.

(注) 関数 f の定義域が、一般の ($\mathbf{R}^2$ とは限らない) 領域のときは、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ を結ぶ線分が D に含まれるならば上の証明がそのまま適用できる. そうでないときは、この不等式が成り立つとは限らない. 例を考えてみてください.