

演習解答例

- [1] 関数 $z = f(x, y) = xy^2$ および $x = \varphi(t) = t^3$, $y = \psi(t) = t^2$ を考える. 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ の導関数を 2 通りの方法で計算して, 一致することを確認せよ:

(1) z を t の関数として具体的に求めてから微分する.

(2) $f_x(x, y), f_y(x, y), \varphi'(t), \psi'(t)$ を求めてから, 合成関数の微分の法則を適用する.

(解答例)

$$(1) \quad z = f(t^3, t^2) = t^3 \cdot (t^2)^2 = t^7. \quad \text{よって} \quad \frac{dz}{dt} = 7t^6.$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = 3t^2, \quad \frac{dy}{dt} = 2t; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= y^2 \cdot 3t^2 + 2xy \cdot 2t \\ &= (t^2)^2 \cdot 3t^2 + 2t^3 \cdot t^2 \cdot 2t = 7t^6 \end{aligned}$$

- [2] (r, θ) 平面の $r > 0$ なる部分から (x, y) 平面への写像を

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

で定める (極座標変換).

(1) この写像のヤコビ行列を求めよ.

(2) 関数 $z = f(x, y)$ を (r, θ) の関数とみなすとき, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を用いて $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を表わせ.

(3) 逆に, $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を用いて $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を表わせ.

(解答例)

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \theta \end{aligned}$$

次のように表わしてもよい ((3) についても同様):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{x}{r} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{r} \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y}.\end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}\end{aligned}$$

3 $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ で定義された関数が α 次の同次関数 (齊次関数) であるとは, 任意の $t > 0$ に対して

$$(*) \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

が成り立つことをいう.

(1) 次の関数が同次関数であることを確かめよ. 何次の同次関数か?

$$(i) \ x^3 + 2xy^2 \quad (ii) \ \sqrt{x^2 + 3y^2} \quad (iii) \ \frac{x^2 + xy}{x^2 + 2y^2}$$

(2) $f(x, y)$ が α 次の同次関数ならば, 偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ は, $\alpha - 1$ 次の同次関数であることを示せ.

(3) $f(x, y)$ が α 次の同次関数ならば

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = \alpha f(x, y)$$

が成り立つことを示せ.

(解答例)

(1) (i), (ii), (iii) がそれぞれ 3 次, 1 次, 0 次の同次関数であることは容易に確かめられる.

以下では f は C^1 級関数であると仮定する.

(2) (*) の両辺を 3 変数 x, y, t の関数とみなして, x について偏微分すると

$$f_x(tx, ty) \cdot t = t^\alpha f_x(x, y).$$

したがって

$$f_x(tx, ty) = t^{\alpha-1} f_x(x, y).$$

が得られる. これは f_x が $\alpha - 1$ 次同次関数であることを示している. f_y についても同様.

(3) (*) の両辺を t について偏微分すると

$$f_x(tx, ty)x + f_y(tx, ty)y = \alpha t^{\alpha-1} f(x, y).$$

ここで $t = 1$ とおくと示すべき等式が得られる.

(注) C^1 級関数 f が (3) の式を満たせば α 次同次関数である. 証明を考えてください.)

(注) $f_x(tx, ty)$ に x が 2 箇所現れるが, 意味が違う. f_x の x は f (第 1 変数, 第 2 変数) という関数を第 1 変数について偏微分したことを示している. $f_x(tx, ty)$ は偏導関数 f_x (第 1 変数, 第 2 変数) の 2 つの変数に tx, ty を代入したものを表わしている.

(x, y) に $f(tx, ty)$ を対応させる関数を x について偏微分したものは $\frac{\partial}{\partial x} f(tx, ty) = f_x(tx, ty)t$ と表わせる. 紛らわしいので注意が必要である.