

1 曲線に沿う微分

区間 $I \subset \mathbf{R}^2$ で定義された連続関数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ を考える. D を $\mathbf{R}^2$ の領域として, $t \in I$ のとき $(\varphi(t), \psi(t)) \in D$ とする.

$$\varphi(t) = (\varphi(t), \psi(t))$$

で表わされる写像 $\varphi: I \rightarrow D$ は D 内の曲線を表わしている. φ, ψ がともに C^1 級の時, φ は C^1 級であるという.

$f(x, y)$ が D 上の関数とすると, 合成関数 $f \circ \varphi(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ が考えられる.

$$I \xrightarrow{\varphi} D \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

定理 φ が t_0 で微分可能, かつ f が $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ で全微分可能ならば, 合成関数 $f \circ \varphi$ は t_0 で微分可能で

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)$$

変数 t, x, y, z が $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = f(x, y)$ という関係で結びつけられていると考えて次のように表わすこともできる:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

2 合成関数の微分

Ω を $\mathbf{R}^2$ ((u, v) 平面) の領域, D を $\mathbf{R}^2$ ((x, y) 平面) の領域とする. $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ を Ω 上の関数として, $(u, v) \in \Omega$ のとき $(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in D$ とする.

$$\varphi(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

は Ω から D への写像である.

$f(x, y)$ が D 上の関数とすると, 合成関数 $f \circ \varphi(t) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ が考えられる.

$$\Omega \xrightarrow{\varphi} D \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

関数 $z = f(x, y)$ の変数 (x, y) を変数 (u, v) に置き換えたとき, この操作を変数変換ということもある.

定理 φ が (u, v) で全微分可能, かつ f が $(x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ で全微分可能ならば, 合成関数 $f \circ \varphi$ は t_0 で全微分可能で

$$(f \circ \varphi)_u(u, v) = f_x(\varphi(u, v), \psi(u, v))\varphi_u(u, v) + f_y(\varphi(u, v), \psi(u, v))\psi_u(u, v)$$

$$(f \circ \varphi)_v(u, v) = f_x(\varphi(u, v), \psi(u, v))\varphi_v(u, v) + f_y(\varphi(u, v), \psi(u, v))\psi_v(u, v)$$

これは次のように表わすこともできる：

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}$$

簡略化して次のように書いてもよい：

$$\begin{aligned}z_u &= z_x x_u + z_y y_u, \\ z_v &= z_x x_v + z_y y_v\end{aligned}$$

行列の記法を用いると次のようになる：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

ここに現れる行列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ を写像 $\varphi = (\varphi, \psi)$ のヤコビ行列（関数行列）という。

3 写像の合成

写像 $\varphi : \Omega \rightarrow D$ が $(u, v) \mapsto (x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ で与えられ、

写像 $f : D \rightarrow \mathbf{R}^2$ ((z, w) 平面) が $(x, y) \mapsto (z, w) = (f(x, y), g(x, y))$ で与えられているとき、合成写像 $f \circ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ が

$$f \circ \varphi(u, v) = (f(\varphi(u, v), \psi(u, v)), g(\varphi(u, v), \psi(u, v)))$$

で定義される。 $\Omega \xrightarrow{\varphi} D \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$

定理 φ, f が全微分可能ならば $f \circ \varphi$ も全微分可能で、そのヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

で与えられる。すなわち

$$(f \circ \varphi \text{ のヤコビ行列}) = (f \text{ のヤコビ行列}) (\varphi \text{ のヤコビ行列})$$

定理（逆写像）写像 $\varphi : \Omega \rightarrow D$ と $f : D \rightarrow \Omega$ が互いに逆写像であるとする。すなわち

$$f \circ \varphi(u, v) = (u, v), \quad \varphi \circ f(x, y) = (x, y). \quad \text{このとき}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{単位行列})$$

演習

- 1 関数 $z = f(x, y) = xy^2$ および $x = \varphi(t) = t^3$, $y = \psi(t) = t^2$ を考える. 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ の導関数を 2通りの方法で計算して, 一致することを確認せよ:

- (1) z を t の関数として具体的に求めてから微分する.
(2) $f_x(x, y), f_y(x, y), \varphi'(t), \psi'(t)$ を求めてから, 合成関数の微分の法則を適用する.

- 2 (r, θ) 平面の $r > 0$ なる部分から (x, y) 平面への写像を

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

で定める (極座標変換).

- (1) この写像のヤコビ行列を求めよ.
(2) 関数 $z = f(x, y)$ を (r, θ) の関数とみなすとき, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を用いて $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を表わせ.
(3) 逆に, $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を用いて $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を表わせ.

- 3 $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ で定義された関数が α 次の同次関数 (斉次関数) であるとは, 任意の $t > 0$ に対して

$$(*) \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

が成り立つことをいう.

- (1) 次の関数が同次関数であることを確かめよ. 何次の同次関数か?

$$(i) \ x^3 + 2xy^2 \quad (ii) \ \sqrt{x^2 + 3y^2} \quad (iii) \ \frac{x^2 + xy}{x^2 + 2y^2}$$

- (2) $f(x, y)$ が α 次の同次関数ならば, 偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ は, $\alpha - 1$ 次の同次関数であることを示せ.

- (3) $f(x, y)$ が α 次の同次関数ならば

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = \alpha f(x, y)$$

が成り立つことを示せ.

(ヒント: $(*)$ を x, y, t について偏微分してみる.)

宿題

12月6日(火) 11:00 までに、全学共通科目レポートボックスに提出

- 1 (u, v) 平面から (x, y) 平面への写像を次のように定める：

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv.$$

- (1) この写像のヤコビ行列を求めよ.

- (2) 関数 $z = f(x, y)$ を (u, v) の関数とみなすとき, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を用いて $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ を表わせ.

- 2 α を実数として、次の3変数関数を考える：

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}.$$

- (1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ および $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を計算せよ.

- (2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ が成り立つときの α の値を求めよ.

- 3 (1) $z = f(x, y)$ を $\mathbf{R}^2$ 上の C^1 級関数とする. 写像 $\varphi : (u, v) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (x, y) \in \mathbf{R}^2$ を $x = u, y = u + v$ によって、 z を u, v の関数とみなすとき, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を用いて $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ を表わせ.

- (2) Xさんの質問：「 $x = u$ だから変数 x と変数 u は同じもののはずです. 同じ変数で偏微分したのに $\frac{\partial z}{\partial x}$ と $\frac{\partial z}{\partial u}$ が違うのはなぜですか？」Xさんが納得するように説明してあげてください.

- 4 f は平面 $\mathbf{R}^2$ で C^1 級の関数とする. 定数 M があって、 $\mathbf{R}^2$ の各点 $\mathbf{x} = (x, y)$ で

$$\sqrt{f_x(\mathbf{x})^2 + f_y(\mathbf{x})^2} \leq M$$

が成り立っているとする. $\mathbf{R}^2$ の任意の2点 $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ について不等式

$$|f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)| \leq M|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$$

が成り立つことを示せ.

(ヒント：2点を結ぶ線分 $(1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2$ ($0 \leq t \leq 1$) での f の変化を考える.)