微分積分学 B 演義 (S2, S6)　No.3　　2016 年 11 月 17 日

宿題解答例

$\boxed{1}$ (1) 関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}$　$(xy\neq 0)$ のグラフの，点 (a,b,c)（ただし $abc=1$） における接平面の方程式を求めよ．

(2) この接平面と 3 つの座標平面で囲まれる 4 面体の体積が一定であることを示せ．

（解答例） (1) f の偏導関数は　$f_x(x,y)=-\dfrac{1}{x^2y},\ f_y(x,y)=-\dfrac{1}{xy^2}$.

$$f(a,b)=\frac{1}{ab}=c,\quad f_x(a,b)=-\frac{1}{a^2b}=-\frac{c}{a},\quad f_y(a,b)=-\frac{1}{ab^2}=-\frac{c}{b}$$

だから，接平面の方程式は

$$z=\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}(x-a)-\frac{1}{ab^2}(y-b)\quad \text{または}\quad z=c-\frac{c}{a}(x-a)-\frac{c}{b}(y-b)$$

または，これを書きなおして

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3.$$

(2) この接平面と，x 軸，y 軸，z 軸との交点は，それぞれ $(3a,0,0)$, $(0,3b,0)$, $(0,0,3c)$. よって，四面体の体積は $\dfrac{1}{6}|3a||3b||3c|=\dfrac{9}{2}$ で一定である．

$\boxed{2}$ 次の関数は原点 $\mathbf{0}=(0,0)$ において連続か？偏微分可能か？全微分可能か？

$$f(x,y)=|xy|^{\alpha}\quad (\alpha>0)$$

（解答例）

（連続性）　$|xy|\leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ だから $(x,y)\to(0,0)$ のとき $|xy|\to 0$, よって $|x,y|^{\alpha}\to 0$. したがって f は $(0,0)$ において連続である．

（偏微分可能性）　$x=0$ または $y=0$ のとき $f(x,y)=0$ だから

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(h,0)-f(0,0)\}=0,\quad \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\{f(0,k)-f(0,0)\}=0.$$

したがって，f は $(0,0)$ で，x についても y についても偏微分可能で，偏微分係数は $f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0$ である．

（全微分可能性）　f が $(0,0)$ で全微分可能であるということの定義は，次のような実数 p,q が存在することである．

$$f(h,k)=f(0,0)+ph+qk+R(h,k),\quad R(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2})$$

いま $f(0,0)=0,\ p=f_x(0,0)=0,\ q=f_y(0,0)=0$ だから，f が $(0,0)$ で全微分可能であるためには

$$f(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2})\quad \text{すなわち}\quad \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\to 0\quad ((h,k)\to(0,0))$$

となることが必要かつ十分である．

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 2^{-\alpha}(h^2+k^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$$

だから $\alpha > 1/2$ のとき $f(h,k) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ であり，f は $(0,0)$ で全微分可能である．$\alpha \le 1/2$ のとき，$h = k \ne 0$ とすると

$$\frac{f(h,h)}{\sqrt{h^2+h^2}} = \frac{|h|^{2\alpha}}{\sqrt{2h^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|h|^{2\alpha-1}$$

で，これは $h \to 0$ のとき 0 に収束しない．よって $f(h,k) = o(\sqrt{h^2+k^2})$ ではない．f は $(0,0)$ で全微分可能ではない．

したがって，$\alpha > 1/2$ のときは全微分可能，$\alpha \le 1/2$ のときは全微分不可能．

$\boxed{3}$ 2 変数関数 $f(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-(x^2/4t)} \quad (t > 0)$ は方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{（熱伝導方程式という）}$$

を満たすことを確かめよ．

（解答例）

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}}\Big(-\frac{x}{2t}\Big) e^{-(x^2/4t)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{t}}\Big\{-\frac{1}{2t} + \Big(-\frac{x}{2t}\Big)^2\Big\} e^{-(x^2/4t)} = \Big(-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{x^2}{4t^{5/2}}\Big) e^{-(x^2/4t)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Big(-\frac{x}{2t^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{x^2}{4t^2}\Big) e^{-(x^2/4t)} = \Big(-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{x^2}{4t^{5/2}}\Big) e^{-(x^2/4t)}$$

$\boxed{4}$ (1) f を $\mathbf{R}^2$ で C^1 級の関数とする．恒等的に $f_x(x,y) = 0$ が成り立てば，$f(x,y)$ は y にのみ依存する関数であることを示せ．

(2) f を $\mathbf{R}^2$ で C^2 級の関数とする．$f_{xy}(x,y) = 0$ が恒等的に成り立てば，x の関数 $g(x)$ と y の関数 $h(y)$ を用いて $f(x,y) = g(x) + h(y)$ と表わせることを示せ．

（解答例）

(1) y の値を固定して $f(x,y)$ を変数 x の関数と考えたとき，導関数が恒等的に 0 だから，定数である．したがって $f(x,y)$ は x の値によらない.（すなわち $f(x,y) = f(0,y)$ ）

(2) $f_x(x,y)$ の y に関する偏導関数が恒等的に 0 だから， $f_x(x,y)$ は x のみの関数である．すなわち $f_x(x,y) = f_x(x,0)$ が恒等的に成り立つ．

つぎに $\varphi(x,y) = f(x,y) - f(x,0)$ とおくと $\varphi_x(x,y) = f_x(x,y) - f_x(x,0) = 0$ が恒等的に成り立つから，φ は y のみの関数である．よって $\varphi(x,y) = \varphi(0,y)$ が恒等的に成り立つ．

これを f を用いて表せば $f(x,y) - f(x,0) = f(0,y) - f(0,0)$ ．すなわち

$$f(x,y) = f(x,0) + f(0,y) - f(0,0).$$

$g(x) = f(x,0), h(y) = f(0,y) - f(0,0)$ とすればよい．