微分積分学 B 演義 (S2, S6)　No.3　　2016 年 11 月 17 日

演習解答例

$\boxed{1}$ 次の集合の内点，外点，境界点からなる集合を求めよ．また与えられた集合が開集合であるか，閉集合であるかを調べよ．(注： 開集合であり同時に閉集合であるかもしれない．またどちらでもないかもしれない．)

$$(1)\quad \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\geq 0\},\qquad (2)\quad \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x^2+y^2<1\},$$
$$(3)\quad \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|<1,\ |y|\leq 1\},\qquad (4)\quad \mathbf{R}^2\setminus\{(1/n,0) \mid n\in\mathbf{N}\},$$
(5)　$\emptyset$ （空集合）　　(6)　$\mathbf{R}^2$ （平面全体）

（解答例）　以下では $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0\}$ などを $\{x>0\}$ のように略記する．

(1) 内点（全体からなる集合–以下同様）$\{x>0\}$，外点 $\{x<0\}$，境界点 $\{x=0\}$.
開集合ではない．閉集合である．

(2) 内点 $\{0<x^2+y^2<1\}$，外点 $\{x^2+y^2>1\}$，境界点 $\{x^2+y^2=0$ または $1\}$
開集合である．閉集合ではない．

(3) 内点 $\{|x|<1,\ |y|<1\}=\{\max(|x|,|y|)<1\}$，
外点 $\{|x|\geq 1$ または $|y|\geq 1\}=\{\max(|x|,|y|)>1\}$，
境界点 $\{(|x|=1,|y|\leq 1)$ または $(|x|\leq 1,|y|=1)\}=\{\max(|x|,|y|)=1\}$
開集合でも閉集合でもない．

(4) 内点 $\mathbf{R}^2\setminus\Big(\{(1/n,0) \mid n\in\mathbf{N}\}\cup\{(0,0)\}\Big)$，　外点 $\emptyset$，　境界点 $\{(1/n,0) \mid n\in\mathbf{N}\}\cup\{(0,0)\}$.
開集合でも閉集合でもない．

(5) 内点 $\emptyset$，外点 $\mathbf{R}^2$，境界点 $\emptyset$.　開集合であり，かつ閉集合でもある．

(6) 内点 $\mathbf{R}^2$，外点 $\emptyset$，境界点 $\emptyset$.　開集合であり，かつ閉集合でもある．
（注：$\mathbf{R}^2$ の部分集合で開集合であり閉集合でもあるのは $\emptyset$ と $\mathbf{R}^2$ のみ.）

$\boxed{2}$ 次の関数は原点 $\mathbf{0}=(0,0)$ において連続か？偏微分可能か？全微分可能か？

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\quad ((x,y)\neq(0,0)\text{ のとき}),\quad f(0,0)=0$$

（解答例）

（連続性）　$|x|,|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ だから $|f(x,y)|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ したがって $(x,y)\to(0,0)$ のとき $|f(x,y)|\to 0=f(0,0)$. したがって f は $(0,0)$ において連続である．

（偏微分可能性）　$x=0$ または $y=0$ のとき $f(x,y)=0$ だから

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(h,0)-f(0,0)\}=0,\quad \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\{f(0,k)-f(0,0)\}=0.$$

したがって，f は $(0,0)$ で，x についても y についても偏微分可能で，偏微分係数は

$f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0$ である．

（全微分可能性） f が $(0,0)$ で全微分可能であるということの定義は，次のような実数 p,q が存在することである．

$$f(h,k)=f(0,0)+ph+qk+R(h,k),\quad R(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2})$$

いま $f(0,0)=0,\ p=f_x(0,0)=0,\ q=f_y(0,0)=0$ だから，f が $(0,0)$ で全微分可能であるためには

$$f(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2})\quad \text{すなわち}\quad \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\to 0\quad ((h,k)\to(0,0))$$

となることが必要かつ十分である．

ところが， $h=k\neq 0$ のとき $\dfrac{f(h,h)}{\sqrt{h^2+h^2}}=\dfrac{h^3}{2^{3/2}h^3}=2^{-3/2}$ だから $f(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2})$ ではない．よって f は $(0,0)$ で全微分可能ではない．

$\boxed{3}$ 次の関数の２次までの偏導関数を求めよ：

$$(1)\quad \log\sqrt{x^2+y^2},\quad ((x,y)\neq(0,0)),\qquad (2)\quad \tan^{-1}\frac{y}{x},\quad (x>0)$$

（解答例） 与えられた関数を $f(x,y)$ とする．

(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ である．

$$f_x=\frac{x}{x^2+y^2},\quad f_y=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)},\quad f_{xy}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)}$$

同様に（x,y の役割を入れ替えて），

$$f_{yy}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)},\quad f_{yx}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)}$$

(2)
$$f_x=\frac{1}{1+(y/x)^2}\Big(-\frac{y}{x^2}\Big)=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad f_y=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)},\quad f_{xy}=f_{yx}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)},\quad f_{yy}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)}$$

（注： これから， (1),(2) の関数はともにラプラス方程式 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ を満たすことがわかる.）

$\boxed{4}$ 関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ $(x^2+y^2<1)$ のグラフ上の点 (a,b,c) における接平面の方程式を求めよ．

（解答例）$z=f(x,y)$ のグラフの $(a,b,f(a,b))$ における接平面は

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

で与えられる．

$$f_x=x(1-x^2-y^2)^{-3/2},\quad f_y=y(1-x^2-y^2)^{-3/2}$$

だから (a,b,c) （ただし $c=f(a,b)$）における接平面は

$$z=(1-a^2-b^2)^{-1/2}+a(1-a^2-b^2)^{-3/2}(x-a)+b(1-a^2-b^2)^{-3/2}(y-b)$$

または，$c=(1-a^2-b^2)^{-1/2}$ であることを用いて書きなおすと

$$z=c+ac^3(x-a)+bc^3(y-b)$$