1 平面上の点集合

座標平面： $\mathbf{R}^2 = \{\mathbf{x} = (x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$.

2 点 $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ の距離： $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

点 $\mathbf{a} = (a, b)$ の ε 近傍： $U_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}$.

定義 (内点, 外点, 境界点) $E \subset \mathbf{R}^2$, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^2$ とする.

(1) $\mathbf{a}$ が E の内点 $\iff \exists \varepsilon > 0, U_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset E$.

(2) $\mathbf{a}$ が E の外点 $\iff \exists \varepsilon > 0, U_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap E = \emptyset$.

(3) $\mathbf{a}$ が E の境界点 $\iff \forall \varepsilon > 0, (U_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap E \neq \emptyset \text{ かつ } U_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap E^C \neq \emptyset)$

(注) $E^C = \mathbf{R}^2 \setminus E$ は E の補集合を表す. $U_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset E$ は $U_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap E^C = \emptyset$ と同じ意味.

$\mathbf{a}$ は E の	内点	境界点	外点
$\mathbf{a}$ は E に	属する ($\mathbf{a} \in E$)		属さない ($\mathbf{a} \notin E$)

定義 (開集合, 閉集合) $E \subset \mathbf{R}^2$ とする.

(1) E が開集合 $\iff E$ に属する点はすべて E の内点 $\iff E$ のどの境界点も E に属さない.

(2) E が閉集合 $\iff E$ に属さない点はすべて E の外点 $\iff E$ の境界点はすべて E に属する.

定義 平面 $\mathbf{R}^n$ の点列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty$ が点 $\mathbf{a}$ に収束する ($\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$) とは:

(ア) $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| = 0$ となること.

これは次の (イ), (ウ) と同値:

(イ) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} (n \geq N \Rightarrow \mathbf{x}_n \in U_\varepsilon(\mathbf{a}))$

(ウ) $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)$, $\mathbf{a} = (a, b)$ として, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

定理 $E \subset \mathbf{R}^2$ とする. E が閉集合であることと次の条件は同値;

E の点からなる点列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty$ が収束するならば, その極限も E に属する.

2 関数の極限, 連続性

E を平面 $\mathbf{R}^2$ 内の空でない集合とし $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ を関数とする.

定義 $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^2$ とする, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$ とは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 (\mathbf{x} \in U_\delta^*(\mathbf{a}) \cap E \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon)$$

(ここで $U_\delta^*(\mathbf{a})$ は $\mathbf{a}$ の δ 近傍 $U_\delta(\mathbf{a})$ から $\mathbf{a}$ を除いたものを表わす.)

定義 f が $\mathbf{a} \in E$ で連続であるとは $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ (左辺の極限が存在して $f(\mathbf{a})$ に等しい) となることをいう. これは次と同値:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\mathbf{x} \in U_\delta(\mathbf{a}) \cap E \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon)$$

3 微分可能性

D を領域 (連結開集合) とし, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ を関数とする.

定義 (偏微分可能性) 関数 f が点 $\mathbf{a} = (a, b) \in D$ において, x について偏微分可能とは

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+h, b) - f(a, b))$$

が存在すること. 同様に, y について偏微分可能とは

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} (f(a, b+k) - f(a, b))$$

が存在すること.

定義 (全微分可能性) 関数 f が点 $\mathbf{a} = (a, b) \in D$ において全微分可能であるとは, 次のような実数 p, q が存在することをいう:

$$f(a+h, y+k) = f(a, b) + ph + qk + R(h, k)$$

とするとき $R(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2})$ すなわち $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$

言い換えれば $z = f(x, y)$ を (a, b) の周りで近似する 1 次式

$$z = f(a, b) + p(x - a) + q(y - b)$$

が存在すること. この 1 次式で表わされる平面を f のグラフの接平面という.

定理 関数 f が点 $\mathbf{a}$ で全微分可能ならば, そこで偏微分可能で $f_x(\mathbf{a}) = p$, $f_y(\mathbf{a}) = q$.

定理 関数 f が領域 D で C^1 級ならば, f は D の各点で全微分可能である.

4 高次偏導関数

関数 f が領域 D の各点で偏微分可能ならば 1 次偏導関数 $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ が定まる.

さらにこれらが D の各点で偏微分可能ならば 2 次偏導関数

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

が定まる. 3 次以上の偏導関数も同様に定義する.

定義 関数 f が D で C^n 級であるとは n 次までの偏導関数が存在して連続であることをいう.

定理 f_{xy} , f_{yx} が存在して連続ならば, $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ.

これより, 例えば f が C^3 級ならば, その 3 次偏導関数について

$$f_{xxx}, \quad f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, \quad f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy}.$$

演習

- 1 次の集合の内点, 外点, 境界点からなる集合を求めよ. また与えられた集合が開集合であるか, 閉集合であるかを調べよ. (注: 開集合であり同時に閉集合であるかもしれない. またどちらでもないかもしれない.)

(1) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0\}$, (2) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$,
(3) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1, |y| \leq 1\}$, (4) $\mathbf{R}^2 \setminus \{(1/n, 0) \mid n \in \mathbf{N}\}$,
(5) $\emptyset$ (空集合) (6) $\mathbf{R}^2$ (平面全体)

- 2 次の関数は原点 $\mathbf{0} = (0, 0)$ において連続か? 偏微分可能か? 全微分可能か?

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}), \quad f(0, 0) = 0$$

- 3 次の関数の 2 次までの偏導関数を求めよ:

(1) $\log \sqrt{x^2 + y^2}$, $((x, y) \neq (0, 0))$, (2) $\tan^{-1} \frac{y}{x}$, $(x > 0)$

- 4 関数 $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ ($x^2 + y^2 < 1$) のグラフ上の点 (a, b, c) における接平面の方程式を求めよ.

宿題

11月22日(火) 11:00 までに, 全学共通科目レポートボックスに提出

- 1 (1) 関数 $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ ($xy \neq 0$) のグラフの, 点 (a, b, c) (ただし $abc = 1$) における接平面の方程式を求めよ.
(2) この接平面と 3 つの座標平面で囲まれる 4 面体の体積が一定であることを示せ.

- 2 次の関数は原点 $\mathbf{0} = (0, 0)$ において連続か? 偏微分可能か? 全微分可能か?

$$f(x, y) = |xy|^\alpha \quad (\alpha > 0)$$

- 3 2 変数関数 $f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-(x^2/4t)}$ ($t > 0$) は方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{熱伝導方程式という})$$

を満たすことを確かめよ.

- 4 (1) f を $\mathbf{R}^2$ で C^1 級の関数とする. 恒等的に $f_x(x, y) = 0$ が成り立てば, $f(x, y)$ は y のみ依存する関数であることを示せ.
(2) f を $\mathbf{R}^2$ で C^2 級の関数とする. $f_{xy}(x, y) = 0$ が恒等的に成り立てば, x の関数 $g(x)$ と y の関数 $h(y)$ を用いて $f(x, y) = g(x) + h(y)$ と表わせることを示せ.