微分積分学 B 演義 (S2, S6)　No.2　　　2016 年 10 月 27 日

宿題解答例

$\boxed{1}$ 次の巾級数は，どんな x について収束するか？またどんな関数を表すか？

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^3}{2^3} + \cdots$$

（解答例）　$|x| < 2$ のとき，　n 次の項の絶対値は $\left(\frac{|x|}{2}\right)^n$ でおさえられ，$\sum \left(\frac{|x|}{2}\right)^n$ が収束するから，この巾級数は収束する．また，$|x| \geq 2$ のとき，n が奇数ならば n 次の項の絶対値は $\left(\frac{|x|}{2}\right)^n \geq 1$．よってこの巾級数は発散する．偶数次の項を集めた級数は

$$1 + \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^4}{4^4} + \cdots = \frac{1}{1-(x/4)^2} = \frac{16}{16-x^2} \qquad (|x| < 4)$$

奇数次の項を集めた級数は

$$\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^5}{2^5} + \cdots = \frac{x/2}{1-(x/2)^2} = \frac{2x}{4-x^2} \qquad (|x| < 2)$$

だから与えられた巾級数の和は $\dfrac{16}{16-x^2} + \dfrac{2x}{4-x^2} \quad (|x| < 2)$.

$\boxed{2}$ 次の関数を 0 を中心とする巾級数で表せ

(1) $\cosh x$　　(2) $\dfrac{1}{x^2+x-2}$　　(3) $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$　　(4) $\tan^{-1} x$

（解答例）

(1)
$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\right\} \\
&= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbf{R})
\end{aligned}$$

次のようにしてもよい. (以下も同様)

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)}{2} \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

(2) $$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\Big)$$
$$= \frac{1}{3}\Big\{(-1-x-x^2+\cdots) - (\frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} - \cdots)\Big\}$$
$$= -\frac{2+1}{3\cdot 2} - \frac{2^2-1}{3\cdot 2^2}x - \frac{2^3+1}{3\cdot 2^3}x^2 - \frac{2^4-1}{3\cdot 2^4}x^3 - \cdots \qquad (|x|<1)$$

(3) $$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x))$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots) - (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots)\Big\}$$
$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \qquad (|x|<1)$$

(4) $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \ (|x|<1)$ の両辺の不定積分をとって

$$\tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (|x|<1).$$

（注）　問 $\boxed{4}$ の結果から，この巾級数は $[-1,1]$ で一様収束し，その和は連続関数である．したがって上の等式は $x=\pm1$ でも成り立つ．

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin(nx)$ は $\mathbf{R}$ で一様収束しその和は C^1 級関数であることを示せ．

（解答例）$f_n(x) = \frac{1}{2^n}\sin(nx)$ とおくと $\sum\|f_n\| = \sum\frac{1}{2^n}$ が収束するから $\sum f_n$ は $\mathbf{R}$ で一様収束する．したがって，その和 $S(x)$ は連続関数である．また $f_n'(x) = \frac{n}{2^n}\cos nx$ で，$\sum\|f_n'\| = \sum\frac{n}{2^n}$ が収束するから $\sum f_n'(x)$ は $\mathbf{R}$ で一様収束する．その和は連続で $S'(x)$ に一致する．

$\boxed{4}$ （関数項交項級数に関するライプニッツの定理）

$f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ は区間 I 上の関数で次の条件を満たすとする：

（ア）$f_n(x)\geq 0 \quad (x\in I) \quad (n=1,2,\ldots)$

（イ）$f_1(x)\geq f_2(x)\geq\ldots$

（ウ）$\|f_n\|\to 0 \quad (n\to\infty)$

関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}f_n(x) = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x) - f_4(x) + \cdots$$

の第 n 部分和を $S_n(x)$ で表す．

(1) 偶数番目の部分和は増加列（$S_2(x)\leq S_4(x)\leq S_6(x)\leq\cdots$），奇数番目の部分和は減少列（$S_1(x)\geq S_3(x)\geq S_5(x)\geq\cdots$）をなすことを示せ．

(2)　この級数が各点収束すること（すなわち $\{S_n(x)\}$ が各点収束すること）を示せ．

(3)　この級数の和を $S(x)$ とするとき $\|S_n - S\| \leq \|f_n\|$ が成り立つことを示せ．

（解答例）

(1)　$$S_{2n+2}(x) - S_{2n}(x) = f_{2n+1}(x) - f_{2n+2} \geq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

だから $\{S_{2k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ は増加列である．また

$$S_{2n+1}(x) - S_{2n-1}(x) = -f_{2n}(x) + f_{2n+1} \leq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

だから $\{S_{2k-1}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ は減少列である．

(2)　各 x について，$\{S_{2k}(x)\}$ は増加列で，$S_{2k}(x) \leq S_1(x)$ だから上に有界．よって収束する．同様に，$\{S_{2k-1}(x)\}$ は減少列で，$S_{2k-1}(x) \leq 0$ だから下に有界．よって収束する．

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k-1}(x) - \lim_{k\to\infty} S_{2k}(x) = \lim_{k\to\infty} f_{2k}(x) = 0$$

だから $\{S_n(x)\}$ は収束する．

(3)　$S_{2k}(x) \leq S(x) \leq S_{2k+1}(x)$ だから

$$0 \leq S(x) - S_{2k}(x) \leq S_{2k+1}(x) - S_{2k}(x) = f_{2k+1}(x).$$

また $S_{2k}(x) \leq S(x) \leq S_{2k-1}(x)$ だから

$$0 \leq S_{2k-1}(x) - S(x) \leq S_{2k-1}(x) - S_{2k}(x) = f_{2k}(x).$$

これより，すべての番号 n について

$$|S_n(x) - S(x)| \leq f_{n+1}(x)$$

が成り立つ．I における上限をとれば,

$$\|S_n - S\| \leq \|f_{n+1}\|$$

が得られる．$\|f_{n+1}\| \leq \|f_n\|$ だから

$$\|S_n - S\| \leq \|f_n\|$$

も成り立つ．

（$*$）　したがって，この関数項級数は区間 I で一様収束する．

（例）　巾級数 $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$ は閉区間 $[0, 1]$ で一様収束する．

また $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$ は $[-1, 1]$ で一様収束する．