微分積分学 B 演義 (S2, S6) No.2　　2016 年 10 月 27 日

1　関数列

I を区間 $\subset \mathbf{R}$ とする．

- I 上の関数 f の（I における）一様ノルム（または上限ノルム）を次で定める：

$$\|f\| = \sup_{x\in I} |f(x)| = \sup\{|f(x)| \mid x \in I\}.$$

- I 上の関数 $f,\ g$ の一様ノルムによる距離を次で定める：

$$\|f\| = \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)|.$$

定義　区間 I 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が（I で） f に，

(1)　各点収束するとは，各 $x \in I$ について $|f_n(x) - f(x)| \to 0 \ \ (n \to \infty)$ となること．

(2)　一様収束するとは，$\|f_n - f\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$ となること．

定理 1 区間 I 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，ある関数 f に I で一様収束するならば f は（I の各点で）連続である．

定理 2 閉区間 $I = [a,b]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，ある関数 f に I で一様収束するならば $\displaystyle\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx \ (n \to \infty)$．言いかえれば

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \qquad \text{（極限と積分の順序交換可能）}$$

定理 3 区間 I で C^1 級の関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，

(1)　導関数の列 $\{f_n'\}$ が I で一様収束し，(2)　ある点 x_0 で $\{f_n(x_0)\}$ が収束する

ならば $\{f_n\}$ は C^1 級関数 f に収束し $f' = g$ である．

2　関数項級数

区間 I 上の関数 f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を項とする関数項級数を考える：

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots .$$

第 n 部分和を　$S_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$ で定める．

区間 I で，級数 $\sum f_n(x)$ が各点収束［一様収束］するとは，部分和の関数列 $\{S_n(x)\}$ が各点収束［一様収束］することをいう．$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ を級数の和とよび $\sum f_n(x)$ で表す.

関数列に関する定理１，２，３は関数項級数の言葉に言い換えることができる（省略）．

定理 4 (ワイエルシュトラスの判定法，優級数定理)

区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ について，

$$\text{級数} \sum \|f_n\| \text{ が収束} \Longrightarrow \text{関数項級数} \sum f_n(x) \text{ は } I \text{ で一様収束.}$$

3 巾級数

次のような級数を，x_0 を中心とする巾(べき)級数 (冪級数) または整級数という．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a^2(x-x_0)^2 + \cdots$$

以下では 0 を中心とする巾級数を考える．

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

定理 5 巾級数 $\sum a_n x^n$ に対して，次のような収束半径 R $(0 \leqq R \leqq \infty)$ が定まる：

(1) $|x| < R$ を満たす x において $\sum a_n x^n$ は収束する．

(2) $|x| > R$ を満たす x において $\sum a_n x^n$ は発散する．

注 この巾級数は

- $R = \infty$ の場合，すべての $x \in \mathbf{R}$ において収束する．
- $R = 0$ の場合，0 以外のすべての x において発散する．
- $|x| = R$ なる x において，収束するか発散するかは場合による．

定理 6 巾級数 $\sum a_n x^n$ に対して，$\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在するとき，収束半径 $R = \frac{1}{\ell}$.

定理 7 巾級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径 $R > 0$ とする．R_0 を $0 < R_0 < R$ を満たす任意の数とするとき，この巾級数は $[-R_0, R_0]$ において一様収束．したがって，この和は $(-R, R)$ で連続.

定理 8 (1) 巾級数を項ごとに微分または積分してできる巾級数の収束半径は，もとの巾級数の収束半径に等しい.

(2) 収束半径 $R > 0$ の巾級数の和を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad (|x| < R)$$

とおくと，f は $(-R, R)$ で何回でも微分可能で

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^3 + \cdots \quad (|x| < R)$$

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots \quad (|x| < R)$$

基本的関数の巾級数展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \qquad (x \in \mathbf{R})$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (x \in \mathbf{R})$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (x \in \mathbf{R})$$

一般２項定理　（ニュートン）任意の実数 α について

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

ここで $\displaystyle \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ （一般２項係数）

等比級数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

は一般２項定理の $\alpha = -1$ の場合と見ることができる．これを項ごとに微分積分すると

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$
$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

演習

$\boxed{1}$ 次の関数列は各点収束するか，また一様収束するか？.

(1)　$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n},\ x \in \mathbf{R} \quad (n = 1, 2, \ldots)$

(2)　$f_n(x) = \dfrac{1}{(x-n)^2+1},\ x \in \mathbf{R} \quad (n = 1, 2, \ldots)$

$\boxed{2}$ $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}, \quad x \in [0, 1] \quad (n = 1, 2, \ldots)$ とする．

(1) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $x \geq 0$ で 各点収束することを示せ.

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ および $\displaystyle \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$ を求めよ.

(3) $0 < a < 1$ として，$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_a^1 f_n(x)\, dx$ および $\displaystyle \int_a^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$ を求めよ.

$\boxed{3}$ 次の巾級数の収束半径を求めよ．また，和はどんな関数か？

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n x^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n$

$\boxed{4}$ 次の関数を，0 を中心とする巾級数として表せ.

(1) $\dfrac{1}{x+2}$ (2) $\dfrac{1}{1+x^2}$

（ヒント：(1), (2) ともに等比級数の和の公式 $1/(1-t) = 1+t+t^2+\cdots$ $(|t|<1)$ に基づいて考える.）

宿題

11 月 1 日（火）11:00 までに，全学共通科目レポートボックスに提出

$\boxed{1}$ 次の巾級数は，どんな x について収束するか？またどんな関数を表すか？

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4^2}+\frac{x^3}{2^3}+\cdots$$

$\boxed{2}$ 次の関数を 0 を中心とする巾級数で表せ

(1) $\cosh x$ (2) $\dfrac{1}{x^2+x-2}$ (3) $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ (4) $\tan^{-1} x$

（ヒント：与えられた関数を，既知の関数の線形結合で表わせるか？既知の関数の項別微分・項別積分で表せるか？）

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin(nx)$ は $\mathbf{R}$ で一様収束しその和は C^1 級関数であることを示せ.

$\boxed{4}$ （関数項交項級数に関するライプニッツの定理）

$f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ は区間 I 上の関数で次の条件を満たすとする：

（ア）$f_n(x) \geq 0 \quad (x \in I) \quad (n=1,2,\ldots)$

（イ）$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots$

（ウ）$\|f_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$

関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}f_n(x) = f_1(x)-f_2(x)+f_3(x)-f_4(x)+\cdots$$

の第 n 部分和を $S_n(x)$ で表す.

(1) 偶数番目の部分和は増加列（$S_2(x) \leq S_4(x) \leq S_6(x) \leq \cdots$），奇数番目の部分和は減少列（$S_1(x) \geq S_3(x) \geq S_5(x) \geq \cdots$）をなすことを示せ.

(2) この級数が各点収束すること（すなわち $\{S_n(x)\}$ が各点収束すること）を示せ.

(3) この級数の和を $S(x)$ とするとき $\|S_n - S\| \leq \|f_n\|$ が成り立つことを示せ.