微分積分学 B 演義 (S2, S6)　No.1　　2016 年 10 月 13 日

宿題解答例

$\boxed{1}$ 次の正項級数の収束発散を調べよ．

$$(1)\quad \sum \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} \qquad (2)\quad \sum \frac{1}{n\log(n+1)} \qquad (3)\quad \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

（解答例） 与えられた級数の第 n 項を a_n と記す．

(1) すべての番号 n について $0 < a_n \leqq \dfrac{1}{2^n}$ で， $\sum \dfrac{1}{2^n}$ が収束するから，比較判定法により，この級数は収束する．

(2) 第 n 部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{2\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log(n+1)} \\ &\geqq \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} \\ &\geqq \int_2^{n+2} \frac{dx}{x\log x} = \big[\log\log x\big]_2^{n+2} = \log\log(n+2) - \log\log 2 \end{aligned}$$

これより，$n \to \infty$ のとき $S_n \to \infty$．よってこの級数は発散する．

(3) $\sqrt[n]{a_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to \dfrac{1}{e}$ $(n \to \infty)$．コーシーの判定法により，この級数は収束する．

（別解） $n = 1, 2, \ldots$ に対して $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \leq \dfrac{1}{2}$ だから $a_n \leq \dfrac{1}{2^n}$．比較判定法により収束すると言ってもよい．

$\boxed{2}$ (1) 正項級数 $\sum a_n$ が収束すれば $\sum a_n^2$ も収束することを示せ．

(2) $\sum a_n$ が正項級数ではないとき，$\sum a_n$ が収束しても $\sum a_n^2$ が収束するとは限らない．このような例を挙げよ．

（解答例） (1) $\sum a_n$ が収束するから，$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$． したがって $\{a_n\}$ は有界である．すなわち M がとれて，すべての n について $a_n \leqq M$ が成り立つ．各 n について $a_n^2 \leqq Ma_n$ で，$\sum(Ma_n)$ が収束するから．$\sum a_n^2$ も収束する．

(2) 例えば $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ は収束するが，$\sum \dfrac{1}{n}$ は発散する．

（注） $\sum a_n$ が収束するが $\sum a_n^3$ は発散するという例：

$$2 - 1 - 1 + \frac{2}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots$$

は収束する（その和は 0）．しかし各項を 3 乗した

$$8 - 1 - 1 + \frac{8}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots$$

は発散する．

$\boxed{3}$ (1) $S_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ とするとき $|S_n - \log 2| < \dfrac{1}{n+1}$ を示せ．

これより級数 $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots$ の和が $\log 2$ であることを示せ．

(2) 上の級数の項を並べ替えてつくった次の級数の和を求めよ：

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$$

（解答例）

(1) $x \neq -1$ のとき

$$1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1+x}$$

が成り立つ．これを区間 $[0,1]$ で積分すると，

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x}.$$

ここで

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2, \quad 0 \leqq \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} \leqq \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

だから $|S_n - \log 2| \leqq \dfrac{1}{n+1}$ したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は収束し，その和は $\log 2$ である．

（注） この級数の和を次のようにして求めることもできる：第 $2n$ 部分和を

$$S_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

と書きなおし，区分求積法の考えで $S_{2n} \to \log 2$ $(n \to \infty)$ を示す．詳細は各自で考えてください．

(2) 第 n 項を a_n とすると

$$a_{3k-2} = \frac{1}{2k-1}, \quad a_{3k-1} = -\frac{1}{4k-2}, \quad a_{3k} = -\frac{1}{4k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

だから

$$a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}.$$

与えられた級数の第 $3k$ 部分和は $S_{3k} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m-1}}{m}$ で，$k \to \infty$ のときこれは $\dfrac{1}{2}\log 2$ に収束する．また，第 $3k+1$ 部分和，$3k+2$ 部分和は $S_{3k+1} = S_{3k} + a_{3k+1}$， $S_{3k+1} = S_{3k} + a_{3k+1} + s_{3k+2}$ で，$k \to \infty$ のとき a_{3k+1}, a_{3k+2} は 0 に収束するから S_{3k+1}，S_{3k+2} は $\dfrac{1}{2}\log 2$ に収束する．したがって S_n は $\dfrac{1}{2}\log 2$ に収束する．

$\boxed{4}$ $\{a_n\}$ は減少列で，$\sum a_n$ が収束すると仮定する．このとき $na_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となることを示せ．

（解答例１） $\sum a_n$ が収束するから，$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$．$\{a_n\}$ が減少列だからすべての n について $a_n \geqq 0$ である．

第 n 部分和を S_n と表わす．

$$S_n - S_{[n/2]} = a_{[n/2]+1} + \cdots + a_n \geqq \frac{n}{2} a_n$$

ここで，実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表わす（ガウス記号）．

$n \to \infty$ のとき S_n，$S_{[n/2]}$ は同じ値（$\sum a_n$ の和）に収束するから，$S_n - S_{[n/2]}$ は 0 に収束する．したがって na_n は 0 に収束する．

（解答例２）$\{a_n\}$ は非負減少列であって $na_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ではないと仮定して，$\sum a_n$ が発散することを示せばよい．

$na_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ではないことから次のような $\varepsilon > 0$ が存在する：

「任意の自然数 N に対して, N 以上の n で $na_n \geq \varepsilon$ を満たすものがとれる」

これより，$n_k a_{n_k} \geqq \varepsilon$ を満たす自然数 n_k $(k = 1, 2, \ldots)$ を $n_k \geq 2n_{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ となるようにとることができる．このとき第 n_k 部分和 S_{n_k} は

$$\begin{aligned} S_{n_k} = (a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) \\ \geq n_1 a_{n_1} + (n_2 - n_1) a_{n_2} + \cdots + (n_k - n_{k-1}) a_{n_k} \\ \geq n_1 a_{n_1} + \frac{n_2}{2} a_{n_2} + \cdots + \frac{n_k}{2} a_{n_k} \geq \frac{k\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ここで $n_k - n_{k-1} \geq \dfrac{1}{2} n_k$ であることを用いた．$k \to \infty$ とするとき S_{n_k} が発散するから，級数 $\sum a_n$ は発散する．

（注） $\sum a_n$ が収束する正項級数でも $\{a_n\}$ が減少列でなければ $na_n \to 0$ $(n \to 0)$ とは限らない．例えば，級数 $\sum a_n$ として，n が平方数のとき $a_n = \dfrac{1}{n}$，そうでないときは $a_n = 0$ となるものを考える．すなわち

$$1+0+0+\frac{1}{4}+0+0+0+0+\frac{1}{9}+0+0+0+0+0+0+\frac{1}{16}+0+0+0+0+0+0+0+0+\frac{1}{25}+0+0+\cdots$$

この級数は収束するが $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ は存在しない．