演習解答例

1 次の正項級数の収束発散を調べよ.

$$(1) \sum \frac{n^2}{2^n} \quad (2) \sum \frac{n!}{2^n} \quad (3) \sum \frac{n!}{n^n} \quad (4) \sum \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+1}$$

(解答例) 以下では与えられた級数の第 n 項を a_n と記す.

(1)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$1/2 < 1$ だから, ダランベールの判定法により, この級数は収束する.

(2) すべての n について $a_n = \frac{1}{2} \cdots \frac{n}{2} \geq \frac{1}{2}$ だから第 n 部分和は $S_n \geq \frac{n}{2}$ だから $n \rightarrow \infty$ 発散する. すなわちこの級数は発散する.

(3) (解 1)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow \frac{1}{e} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$1/e < 1$ だから, ダランベールの判定法により, この級数は収束する.

(解 2)

$$\log \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 \log x dx = -1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

したがって $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1/e$ ($n \rightarrow \infty$). コーシーの判定法によりこの級数は収束する.

(解 3) $n \geq 2$ のとき $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{2}{n^2}$, また $a_1 = 1$ だから, すべての n について $a_n \leq \frac{2}{n^2}$ が成り立つ. $\sum \frac{2}{n^2}$ が収束するから, 比較判定法により, この級数は収束する.

(4) $n \geq 2$ のとき, $n+2 \leq 2n$, $n^2+1 > n^2$ だから, $a_n = \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+1} \leq \frac{\sqrt{2n}}{n^2} = \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}$ (これは $n=1$ のときも成り立つ.)

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq a_1 + \sqrt{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{3/2}} \leq \int_1^n \frac{dx}{x^{3/2}} = a_1 + \sqrt{2} \cdot 2(1 - 1/\sqrt{n}) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{2}$$

だから部分和の列は上に有界である. したがってこの級数は収束する.

(注) 「 $\sum \frac{1}{n^s}$ は $s > 1$ のとき収束, $s \leq 1$ のとき発散する」という事実は証明なしで使ってもよいが, 証明を求められればできなくてはいけない.

2 正項級数 $\sum a_n, \sum b_n$ が共に収束すれば $\sum \sqrt{a_n b_n}$ も収束することを示せ.

(解答例 1) $\sum a_n, \sum b_n$ が収束するならば $\frac{1}{2}(a_n + b_n)$ も収束する. 相加・相乗平均の間の不等式により, 各 n について $\sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ が成り立つから, 比較判定法により $\sum \sqrt{a_n b_n}$ も収束する.

(解答例 2) $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ とおくと, この第 n 部分和は $\sum_{k=1}^n a_k \leq A, \sum_{k=1}^n b_k \leq B$ をみ
たす. シュワルツの不等式 (コーシー・シュワルツの不等式) により

$$\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k b_k}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k\right) \leq AB$$

したがって、 $\sum \sqrt{a_n b_n}$ の部分和は つねに $\sqrt{AB}$ 以下である。部分和が上に有界なので級数 $\sum \sqrt{a_n b_n}$ は収束する。(これより級数の和が $\sqrt{AB}$ 以下であることがわかる。)

3 次の級数の収束発散を調べよ。

$$(1) \sum (-1)^n \sin \frac{1}{n} \quad (2) \sum \frac{\sin n}{n^{3/2}}$$

(1) $\sin x$ は区間 $[0, \pi/2]$ において増加関数であるから、 $\sin(1/n)$ は減少列で、 $\sin(1/n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。交項級数に関するライプニッツの定理からこの級数は収束する。

(2) すべての n について $\frac{|\sin n|}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ が成り立つ。 $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ が収束するから比較判定法により、 $\frac{|\sin n|}{n^{3/2}}$ も収束する。絶対値級数が収束するから与えられた級数は収束する。

4 次の級数の収束発散を調べよ

$$(1) 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

$$(2) 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

(解答例)

(1) $1/\sqrt{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) は減少列で 0 に収束する。交項級数に関するライプニッツの定理によりこの級数は収束する。

(2) 各 $k = 1, 2, \dots$ について

$$\begin{aligned} a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k} &= \frac{1}{\sqrt{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{4k}} + \frac{1}{\sqrt{4k}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} \\ &= \frac{1 - 1/\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって第 $3k$ 部分 S_{3k} は

$$S_{3k} \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

ところで

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \int_1^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{k+1} - 1)$$

だから、 $k \rightarrow \infty$ のとき $S_{3k} \rightarrow \infty$ 。したがって級数 (2) は発散する。