

日程 講義 (月 2) 10/3, 17, 24, 31, 11/7, 14, 28, 12/5, 12, 19, 26, 1/4, 16, 23 (14 回)
 演義 (S2:木 1, S6:木 2) 10/13, 27, 11/17, 12/1, 15, 1/5, 19 (7 回)

1 級数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$ を (無限) 級数という. (以下では $\sum a_n$ と略記することがある.)

第 n 部分和を $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める. 級数 $\sum a_n$ が収束するとは, 部分和の数列 $\{S_n\}$ が収束することをいう. $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を級数の和とよび $\sum a_n$ で表す.

例: 等比級数 (幾何級数) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = 1 + a + a^2 + \cdots$

第 n 部分和は, $a \neq 1$ ならば $S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$, $a = 1$ ならば $S_n = n$. よって, この級数は $|a| < 1$ のとき収束しその和は $\frac{1}{1-a}$. また $|a| \geq 1$ のときは発散する.

命題 (1) $\sum a_n$ が収束すれば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (2) 級数の有限個の項を取り去っても, 付け加えても, 値を変更しても, 収束・発散には影響しない. (3) 級数 $\sum a_n, \sum b_n$ がともに収束すれば $\sum(a_n + b_n)$ も収束し, $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

2 正項級数

すべての $n \in \mathbf{N}$ について $a_n \geq 0$ である級数を正項級数という.

定理 正項級数 $\sum a_n$ が収束するためには, 部分和の列 $\{s_n\}$ が上に有界であること ($\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, s_n \leq M$) が必要かつ十分.

定理 (比較判定法) すべての $n \in \mathbf{N}$ について $0 \leq a_n \leq b_n$ とする. このとき

- (1) $\sum b_n$ が収束 $\implies \sum a_n$ も収束.
- (2) $\sum a_n$ が発散 $\implies \sum b_n$ も発散.

定理 (コーシーの判定法) $\sum a_n$ が正項級数で, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ が存在するとする. 級数 $\sum a_n$ は $r < 1$ ならば収束, $r > 1$ ならば発散.

定理 (ダランベールの判定法) $\sum a_n$ が正項級数で, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$ が存在するとする. 級数 $\sum a_n$ は $r < 1$ ならば収束, $r > 1$ ならば発散.

定理（積分判定法） $f(x)$ を $x \geq 1$ で定義された正値減少関数とする.

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束 $\iff$ 広義積分 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ が収束.

例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$ が収束 $\iff \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ が収束 $\iff s > 1$

3 絶対収束と条件収束

級数 $\sum a_n$ に対して, 各項の絶対値をとった級数 $\sum |a_n|$ を絶対値級数という.

定理 絶対値級数 $\sum |a_n|$ が収束すればもとの級数 $\sum a_n$ も収束する.

(証明) 各 n について $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$ とおくと

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-, \quad 0 \leq a_n^+ \leq |a_n|, \quad 0 \leq a_n^- \leq |a_n|$$

が成り立つ. $\sum |a_n|$ が収束すれば, 比較判定法により, $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ も収束する. したがって $\sum a_n = \sum (a_n^+ - a_n^-)$ も収束する.

- $\sum a_n$ が絶対収束するとは, $\sum |a_n|$ が収束する (したがって $\sum a_n$ も収束する) ことをいう.
- $\sum a_n$ が条件収束するとは, $\sum |a_n|$ が発散するが $\sum a_n$ は収束することをいう.

$\sum a_n \backslash \sum a_n $	収束	発散
収束	絶対収束	条件収束
発散	×	発散

定理 絶対収束する級数は項の順序を入れ替えても同じ値に収束する.

定理（ライプニッツ） $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ かつ $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

は収束する.

条件収束する級数の例 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ は収束する (その和は $\log 2 = 0.693\dots$)
 が, その絶対値級数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ は発散する.

演習

1 次の正項級数の収束発散を調べよ.

$$(1) \sum \frac{n^2}{2^n} \quad (2) \sum \frac{n!}{2^n}$$
$$(3) \sum \frac{n!}{n^n} \quad (4) \sum \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+1}$$

2 正項級数 $\sum a_n$, $\sum b_n$ が共に収束すれば $\sum \sqrt{a_n b_n}$ も収束することを示せ.

3 次の級数の収束発散を調べよ.

$$(1) \sum (-1)^n \sin \frac{1}{n} \quad (2) \sum \frac{\sin n}{n^{3/2}}$$

4 次の級数の収束発散を調べよ

$$(1) 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$
$$(2) 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

(ヒント: 第 n 項を a_n とすると

$$a_{3k-2} = \frac{1}{\sqrt{4k-3}}, \quad a_{3k-1} = \frac{1}{\sqrt{4k-1}}, \quad a_{3k} = -\frac{1}{\sqrt{2k}} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

である.)

宿題

10月18日(火) 11:00 までに, 全学共通科目レポートボックスに提出

1 次の正項級数の収束発散を調べよ.

$$(1) \sum \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} \quad (2) \sum \frac{1}{n \log(n+1)} \quad (3) \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

2 (1) 正項級数 $\sum a_n$ が収束すれば $\sum a_n^2$ も収束することを示せ.

(2) $\sum a_n$ が正項級数ではないとき, $\sum a_n$ が収束しても $\sum a_n^2$ が収束するとは限らない. このような例を挙げよ.

(*) 上の問題において, $\sum a_n^2$ を $\sum a_n^3$ で置き換えるとどうなるだろうか? 興味ある人は考えてください.

- 3 (1) $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ とするとき $|S_n - \log 2| < \frac{1}{n+1}$ を示せ.

これより級数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ の和が $\log 2$ であることを示せ.

(ヒント: $1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^{n-1} = \frac{1 - (-x)^n}{1 + x}$ の区間 $[0, 1]$ 上の積分を考える.)

(2) 上の級数の項を並べ替えてつくった次の級数の和を求めよ:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$$

(ヒント: 第 n 項を a_n とすると $a_{3k-2}, a_{3k-1}, a_{3k}$ ($k = 1, 2, \dots$) はどう表されるか?)

- 4 $\{a_n\}$ は減少列で, $\sum a_n$ が収束すると仮定する. このとき $na_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となることを示せ.