

- 1 (1) 巾級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ はどんな x について収束するか?

(2) 上の巾級数の和を初等関数を用いて表せ.

(解答例) (1) x^n の係数を a_n とすると

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ダランベールの判定法より, この巾級数の収束半径は $1/2$ である.

$x = 1/2$ のときこの級数は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (調和級数) となり発散する. $x = -1/2$ のとき, この級数

は $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ となる. これは交項級数に関するライプニッツの定理により収束する. (その和は $-\log 2$.) したがって, 与えられた巾級数が収束するのは $-1/2 \leq x < 1/2$ のときである.

(2) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ($-1 < x < 1$) を項別積分して

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \quad (-1 < x < 1)$$

が得られる. $x = -1$ のときも, 両辺の値は $-\log 2$ で, この等式は成り立つ.

ここで x を $2x$ で置き換えれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n = -\log(1-2x) \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}\right)$$

が得られる.

注: (*) の証明:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

の両辺を積分すると

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

・ $-1 \leq x \leq 0$ の場合, $x \leq t \leq 0$ ならば $0 \leq \frac{1}{1-t} \leq 1$ だから

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \left| \int_0^x t^n dt \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

・ $0 \leq x < 1$ の場合, $0 \leq t \leq x$ のとき $0 < \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$ だから

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt \right| \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$$

したがって $-1 \leq x < 1$ の場合 $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$. これより (*) が成り立つことがわかる.

2 関数列 $f_n(x) = nxe^{-nx}$ ($n = 1, 2, \dots$) は $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ において

(1) 各点収束するか? (2) 一様収束するか?

(解答例) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ とおく.

(1) すべての n について $f_n(0) = 0$ だから, $\{f_n(0)\}$ は 0 に収束する.

$x > 0$ のとき, すべての n について, $e^{nx} = 1 + nx + \frac{(nx)^2}{2} + \dots > \frac{(nx)^2}{2}$ だから

$0 < f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}} < \frac{2}{nx}$ が成り立つ. よって $\{f_n(x)\}$ は 0 に収束する.

したがって, この関数列は I において, 定数関数 0 に各点収束する.

(2) f_n と 0 の (I における) 一様ノルムによる距離 $\|f_n\| = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ を考える.

$f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{e}$ だから, すべての n について $\|f_n\| = \sup_{x \in I} |f_n(x)| \geq \frac{1}{e}$ である. (実際は $\|f_n\| = \frac{1}{e}$) したがって $\|f_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) とはならない. よって, この関数列は I で一様収束しない.

3 (1) 平面 $\mathbb{R}^2$ の集合 E が開集合であるということの定義を, 点 $\mathbf{a}$ の ε 近傍

$U_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}$ を用いて述べよ.

(2) E を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. $\mathbb{R}^2$ の点からなる点列 $\{\mathbf{x}_n\}_n$ が E に属する点

$\mathbf{a}$ に収束するならば, $\mathbf{x}_n \notin E$ となる n は有限個しかないことを証明せよ.

(解答例)

(1) E が開集合であるとは, E の任意の点 $\mathbf{a}$ に対して, 正数 ε を, $U_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset E$ となるようにとれることをいう.

(注) 『 E の任意の点 $\mathbf{a}$ に対して $U_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset E$ となるように正数 ε をとれること』と言うと 2 通りに解釈できてしまう.

(2) $\mathbf{a}$ は開集合 E に属しているから, $\varepsilon > 0$ を $U_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset E$ となるようにとれる. このような ε をひとつ定める. 点列 $\{\mathbf{x}_n\}_n$ が $\mathbf{a}$ に収束するから, 自然数 N を, 「 $n \geq N$ ならば $\mathbf{x}_n \in U_\varepsilon(\mathbf{a})$ 」となるように定めることができる. このとき, $n \geq N$ ならば $\mathbf{x}_n \in E$ となるから $\mathbf{x}_n \notin E$ となる可能性があるのは $n < N$ の場合だけである. したがって $\mathbf{x}_n \notin E$ となる n は有限個しかない.

4 関数 $f(x, y) = x^2 - 3y^2$ について次の問に答えよ.

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(2, 1, f(2, 1))$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) $(2, 1)$ を通る f の等高線の接線の方程式を求めよ.

(解答例)

(1) $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = -6y$ である. $f(2, 1) = 1$, $f_x(2, 1) = 4$, $f_y(2, 1) = -6$ だから, 接平面の方程式は

$$z = 1 + 4(x - 2) - 6(y - 1)$$

または, これを書きなおして

$$4x - 6y - z - 1 = 0$$

(2) $4(x - 2) - 6(y - 1) = 0$ または, これを書きなおして $2x - 3y - 1 = 0$.

5 (u, v) 平面から (x, y) 平面への写像を次のように定める.

$$x = u - v^2, \quad y = v$$

- (1) この写像のヤコビ行列 (関数行列) を求めよ.
(2) (x, y) 平面上の C^2 級関数 $z = f(x, y)$ が与えられたとして, 合成関数

$$z = f(u - v^2, v)$$

を考える. 偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を用いて $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ を表わせ.

- (3) z の x, y に関する 1 次および 2 次偏導関数を用いて $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ を表わせ.

(解答例)

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = -2v \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left(-2v \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= -2v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= -2v \left(-2v \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) + \left(-2v \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= 4v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4v \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \end{aligned}$$

ここで, f が C^2 級だから $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ であることを用いた.