

- 1 (1) 巾級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$  はどんな  $x$  について収束するか?  
(2) 上の巾級数の和を初等関数を用いて表せ.

- 2 関数列  $f_n(x) = nxe^{-nx}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) は  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  において  
(1) 各点収束するか? (2) 一様収束するか?

- 3 (1) 平面  $\mathbb{R}^2$  の集合  $E$  が開集合であるということの定義を, 点  $\mathbf{a}$  の  $\varepsilon$  近傍  $U_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}$  を用いて述べよ.  
(2)  $E$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合とする.  $\mathbb{R}^2$  の点からなる点列  $\{\mathbf{x}_n\}_n$  が  $E$  に属する点  $\mathbf{a}$  に収束するならば,  $\mathbf{x}_n \notin E$  となる  $n$  は有限個しかないと証明せよ.

- 4 関数  $f(x, y) = x^2 - 3y^2$  について次の問に答えよ.  
(1) 曲面  $z = f(x, y)$  上の点  $(2, 1, f(2, 1))$  における接平面の方程式を求めよ.  
(2)  $(2, 1)$  を通る  $f$  の等高線の接線の方程式を求めよ.

- 5  $(u, v)$  平面から  $(x, y)$  平面への写像を次のように定める.

$$x = u - v^2, \quad y = v$$

- (1) この写像のヤコビ行列 (関数行列) を求めよ.  
(2)  $(x, y)$  平面上の  $C^2$  級関数  $z = f(x, y)$  が与えられたとして, 合成関数

$$z = f(u - v^2, v)$$

を考える. 偏導関数  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  を用いて  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$  を表わせ.

- (3)  $z$  の  $x, y$  に関する1次および2次偏導関数を用いて  $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$  を表わせ.