

- 1 (1) 平面 $\mathbb{R}^2$ の集合 E が開集合であるということの定義を, 点 $\mathbf{a}$ の ε 近傍 $U_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}$ を用いて, 述べよ. (記号 $\forall, \exists$ を用いないこと.)

(2) E_1, E_2 が開集合ならばこれらの共通部分 $E_1 \cap E_2$ もまた開集合であることを示せ.

(3) 次の主張が正しいければ証明を, 誤りならば反例を与えよ:

『 E_n ($n = 1, 2, \dots$) が開集合ならば, これらの共通部分 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ も開集合である.』

(解答例)

(1) E が開集合であるとは, E に属する任意の点 $\mathbf{a}$ に対して, (その点に応じた) 正数 ε を適切にとれば, $U_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset E$ が成り立つことをいう. (注: 「 E が開集合であるとは, E に属する点がすべて E の内点であることをいう.」または「 E が開集合であるとは, E の境界点が E には属さないことをいう.」といったもよい. ただし, この場合「内点」, 「境界点」の定義をしなくてはならない.)

(2) $\mathbf{a}$ を $E_1 \cap E_2$ に属する任意の点とする. $\mathbf{a}$ は開集合 E_1 に属するから, 正数 ε_1 を $U_{\varepsilon_1}(\mathbf{a}) \subset E_1$ となるようにとれる. 同様に正数 ε_2 を $U_{\varepsilon_2}(\mathbf{a}) \subset E_2$ となるようにとれる. $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ とおけば $U_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset E_1 \cap E_2$ が成り立つ. したがって $E_1 \cap E_2$ は開集合である.

(3) この主張は誤りである. 反例を挙げる. 以下の例において E_n ($n = 1, 2, \dots$) は開集合であるが $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ は開集合ではない.

例1 $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{(0, 0)\}$.

例2 $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > \frac{1}{n}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$.

例3 $E_n = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0), (\frac{1}{2}, 0), \dots, (\frac{1}{n}, 0)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n = 1, 2, \dots\}$.

(注) すべての $n = 1, 2, \dots$ について $E_1 \cap \dots \cap E_n$ は開集合である. しかしこのことから $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ が開集合であるとはいえない.

(注) 『 E は開集合である』の否定は『 E は閉集合である』ではない. 「開集合でもなく閉集合でもない集合」や, 「開集合であり同時に閉集合である集合」がある.

- 2 (1) 巾級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$ はどんな x について収束するか?
(2) 上の巾級数の和を初等関数を用いて表せ.

(解答例)

(1) この巾級数の n 次の項の係数を a_n とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ だからこの巾級数の収束半径は 3.

したがって $|x| < 3$ ならば収束, $|x| > 3$ ならば発散する. $x = \pm 3$ のときは, $\sum_{n=1}^{\infty} n, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ となって発散する. よってこの巾級数は $|x| < 3$ のとき収束し, $|x| \geq 3$ のとき発散する.

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

を項別微分すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1)$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1)$$

x を $x/3$ で置き換えれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n = \frac{x/3}{(1-x/3)^2} = \frac{3x}{(3-x)^2} \quad (|x| < 3)$$

が得られる.

(別解) 巾級数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ の第 N 部分和 $S_N(x)$ は

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N nx^n = \frac{x - (N+1)x^{N+1} + Nx^{N+2}}{(1-x)^2}.$$

$|x| < 1$ ならば $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. ここで x を $x/3$ で置き換えれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n = \frac{x/3}{(1-x/3)^2} = \frac{3x}{(3-x)^2} \quad (|x| < 3)$$

が得られる.

3 関数 $f(x, y) = x^4 - 3x^2 + y^2 + 2xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について次の問に答えよ:

- (1) 1次および2次偏導関数を求めよ.
- (2) 極大値, 極小値を(存在すれば)求めよ.
- (3) 最大値・最小値を(存在すれば)求めよ.

(解答例)

$$(1) \quad \begin{aligned} f_x &= 4x^3 - 6x + 2y, & f_y &= 2y + 2x \\ f_{xx} &= 12x^2 - 6, & f_{xy} &= f_{yx} = 2, & f_{yy} &= 2 \end{aligned}$$

(2) $f_x = 0$ かつ $f_y = 0$ となるのは, $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ の3点である.

これらの点におけるヘッセ行列式を $H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ で表わす.

(ア) $(0, 0)$ においては $H = (-6) \cdot 2 - 2^2 = -16 < 0$. したがって f はこの点で極大でも極小でもない.

(イ) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ においては, $H = 18 \cdot 2 - 2^2 = 32 > 0$. また $f_{xx} = 18 > 0$. この点で f は(狭義)極小値をとる.

- (ウ) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ においても同様で、この点で f は (狭義) 極小値をとる。
- (3) 極大値をとる点が存在しないから最大値をとる点は存在しない。(または、どんな実数 M を与えても、 $f(x, y) \geq M$ となる点 (x, y) が見出せるから、最大値をとる点は存在しない。)
- $f(x, y)$ は次のように書きなおせる。

$$f(x, y) = (y + x)^2 + (x^2 - 2)^2 - 4$$

よって、すべての (x, y) について $f(x, y) \geq -4$ 。また $f(x, y) = -4$ となるのは $(x, y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 、 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ の2点である。よって f はこの2点で最小値 -4 をとる。

(注) f が $(0, 0)$ で極値をとらないことは次のようにしてもわかる： $f(x, 0) = x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 - 3)$ だから $(0, 0)$ のいくらでも近くに $f < 0$ となる点がある。また $f(0, y) = y^2$ だから $(0, 0)$ のいくらでも近くに $f > 0$ となる点がある。

- 4** (u, v) 平面から (x, y) 平面への写像を次のように定める。

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv$$

- (1) この写像のヤコビ行列 (関数行列) を求めよ。
- (2) (x, y) 平面上の C^2 級関数 $z = f(x, y)$ が与えられたとして、合成関数

$$z = f(u^2 - v^2, 2uv)$$

を考える。偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を用いて $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ を表わせ。

- (3) z の x, y に関する1次および2次偏導関数を用いて $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ を表わせ。

(解答例)

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = 2u \frac{\partial z}{\partial x} + 2v \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = -2v \frac{\partial z}{\partial x} + 2u \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(-2v \frac{\partial z}{\partial x} + 2u \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= -2v \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + 2u \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= -2v \left(2u \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) + 2u \left(2u \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= -4uv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4uv \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

ここで関数 f が C^2 級だから $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ であることを用いた。

(注) x, y を用いて次のように表してもよい：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = -2y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y}$$

- 5** 次の広義重積分が収束するために α が満たすべき条件を求めよ．また，そのときの広義重積分の値を求めよ：

$$\iint_E \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + 2)^\alpha} dx dy, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x\}$$

(解答例)

E の近似列として

$$E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq n^2\} \quad n = 1, 2, \dots$$

をとる．被積分関数が正だから，広義重積分が収束するためには， E_n 上の重積分の値 $I_n(\alpha)$ が $n \rightarrow \infty$ のとき収束することが必要十分である．

極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ によって

$$D_n = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq n, 0 \leq \theta \leq \pi/4\}$$

は E_n の上にうつり，これは D_n の境界を除いて 1 対 1 である．またこの極座標変換のヤコビ行列式は r である．したがって

$$I_n(\alpha) = \iint_{E_n} \frac{x^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + 2)^\alpha} = \iint_{D_n} \frac{r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta}{(r^2 + 2)^\alpha} = \int_0^{\pi/4} \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_0^n \frac{r^3 dr}{(r^2 + 2)^\alpha}.$$

ここで

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

また $\alpha \neq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{r^3 dr}{(r^2 + 2)^\alpha} &= \frac{1}{2} \int_0^{n^2} \frac{t dt}{(t + 2)^\alpha} = \frac{1}{2} \int_0^{n^2} \left(\frac{1}{(t + 2)^{\alpha-1}} - \frac{2}{(t + 2)^\alpha} \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2(2 - \alpha)(t + 2)^{\alpha-2}} - \frac{1}{(\alpha - 1)(t + 2)^{\alpha-1}} \right]_{t=0}^{n^2} \end{aligned}$$

これは， $\alpha > 2$ ならば， $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\left(\frac{1}{\alpha - 2} - \frac{1}{\alpha - 1} \right) \frac{1}{2^{\alpha-1}} = \frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)2^{\alpha-1}}.$$

に収束する．よって $\alpha > 2$ のとき広義重積分は収束し，その値は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha) = \frac{\pi/4 + 1/2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)2^\alpha}$$

$\alpha < 2$ ならば，これは発散する．

また $\alpha \leq 2$ ならば

$$\int_0^n \frac{r^3 dr}{(r^2 + 2)^\alpha}$$

は $n \rightarrow \infty$ のとき発散するので、問題の広義積分は発散する。

(注1) 変数変換の公式で、ヤコビアンを忘れないこと。 $dx dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv$ (特に、極座標変換については $dx dy = r dr d\theta$) と覚えておくとよい。

(注2) 収束・発散を調べるだけなら次のようにするとよい：

$$E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

とすると、問題の広義重積分は E' 上の広義重積分の収束・発散に応じて収束発散する。

E' において、

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq x^2 \leq x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 < x^2 + y^2 + 2 \leq 3(x^2 + y^2)$$

であるから、

$$\frac{1}{2 \cdot 3^\alpha (x^2 + y^2)^{\alpha-2}} \leq \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + 2)^\alpha} \leq \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha-2}}.$$

したがって、問題の広義積分は

$$\iint_{E'} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy$$

の収束・発散に応じて収束・発散する。これは $\alpha > 2$ のとき収束、 $\alpha \leq 2$ のとき発散する。