微分積分学Ｂ 期末試験　（上田）　2017年1月30日

$\boxed{1}$ (1) 平面 $\mathbb{R}^2$ の集合 E が開集合であるということの定義を，点 $\boldsymbol{a}$ の ε 近傍 $U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \varepsilon\}$ を用いて，述べよ.（記号 $\forall$, $\exists$ を用いないこと.）

(2) E_1, E_2 が開集合ならばこれらの共通部分 $E_1 \cap E_2$ もまた開集合であることを示せ.

(3) 次の主張が正しければ証明を，誤りならば反例を与えよ：

『E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ が開集合ならば，これらの共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ も開集合である.』

$\boxed{2}$ (1) 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$ はどんな x について収束するか？

(2) 上の巾級数の和を初等関数を用いて表せ.

$\boxed{3}$ 関数 $f(x, y) = x^4 - 3x^2 + y^2 + 2xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について次の問に答えよ：

(1) 1次および2次偏導関数を求めよ.

(2) 極大値，極小値を（存在すれば）求めよ.

(3) 最大値・最小値を（存在すれば）求めよ.

$\boxed{4}$ (u, v) 平面から (x, y) 平面への写像を次のように定める.

$$x = u^2 - v^2,\ y = 2uv$$

(1) この写像のヤコビ行列（関数行列）を求めよ.

(2) (x, y) 平面上の C^2 級関数 $z = f(x, y)$ が与えられたとして，合成関数

$$z = f(u^2 - v^2, 2uv)$$

を考える．偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を表わせ.

(3) z の x, y に関する1次および2次偏導関数を用いて $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ を表わせ.

$\boxed{5}$ 次の広義重積分が収束するために α が満たすべき条件を求めよ．また，そのときの広義重積分の値を求めよ：

$$\iint_E \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + 2)^\alpha}\, dxdy, \qquad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x\}$$