不定値ユニタリ群の作用する等質領域とその特徴付け

浦項工科大学校 永田義一

2002 年に A.V.Isaev と N.G.Kruzhilin によって, ユニタリ群 $U(n)$ が正則自己同型写像として効果的に作用する n 次元複素多様体が決定された. その応用として, 複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ の自己同型群による特徴付けが示された. これは次のことを意味する. 複素多様体 M に対してその正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ はコンパクト開位相によって位相群となる. このとき, 位相群として $\mathrm{Aut}(M) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ ならば複素多様体として $M \simeq \mathbb{C}^n$ が成り立つ. この発表では, $GU(p,q)$ の作用する $p+q$ 次元複素多様体をある条件のもと決定したので, そこに出てくる領域の特徴付けとともに述べる. ここで $J = \mathrm{diag}[-E_q, E_p] \in GL(p+q, \mathbb{C})$ として

$$\begin{aligned} GU(p,q) &= \{A \in GL(p+q, \mathbb{C}) : A^* JA = \nu(A)J \text{ for some } \nu(A) \in \mathbb{R}_{>0}\} \\ &\simeq U(p,q) \times \mathbb{R}_{>0}, \end{aligned}$$

である. 定理を述べる前に領域の記号を導入しておく:

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ \ \mathbb{B}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\},$$

$$D^{p,q} = \{(z_1, \ldots, z_q, z_{q+1}, \ldots, z_{p+q}) \in \mathbb{C}^{p+q} : -|z_1|^2 - \cdots - |z_q|^2 + |z_{q+1}|^2 + \cdots + |z_{p+q}|^2 > 0\}.$$

Theorem 0.1 ([3], [4])**.** *M を $n+1$ 次元複素多様体で滑らかな正則包を持つとする (つまりシュタイン多様体の領域になっている). 単射な位相群の準同型 $\rho : GU(n,1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ が存在する時, M は $\mathbb{C}^{n+1}$, $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, $D^{n,1}$, $D^{1,n} \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{B}^n$ and $\mathbb{C} \times \mathbb{B}^n$ のいずれかと同型である.*

一般の $GU(p,q)$ に対しても講演の時に述べる. 定理に出てくる領域の正則自己同型群を決定することで次の結果を得る.

Corollary 0.1 ([4])**.** *M を $p+q$ 次元の複素多様体で, 上と同様に, 滑らかな正則包を持つとする. さらに位相群の同型 $\rho : \mathrm{Aut}(D^{p,q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(M)$ が存在すると仮定する. この時次が成り立つ. (i) $q = 1$ のとき $M \simeq D^{p,1}$. (ii) $p = 1$ のとき $M \simeq D^{1,q}$. (iii) $p = q$ のとき $M \simeq D^{p,p}$.*

領域の正則自己同型群は次のとおり ($\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ はのぞく).

Theorem 0.2 ([1]). $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C} \times \mathbb{B}^n)$ とする．このとき

$$f_0(z_0, z_1, \ldots, z_n) = a(z_1, \ldots, z_n)z_0 + b(z_1, \ldots, z_n),$$

$$f_i(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \frac{a_{ij} + \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j}{a_{00} + \sum_{j=1}^n a_{0j} z_j}, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

ここで a, b は $\mathbb{B}^n$ 上の正則函数で a は零点を持たないもの．$(a_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ は $SU(n, 1)$ の元.

Theorem 0.3 ([3]). $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n) \in \mathrm{Aut}(C^{n,1})$ とする．このとき

$$f_0(z_0, z_1, \ldots, z_n) = c\left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right) z_0 \text{ or } c\left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right) z_0^{-1},$$

$$f_i(z_0, z_1, \ldots, z_n) = f_0(z_0, z_1, \ldots, z_n)\frac{a_{ij} + \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j}{a_{0j} + \sum_{j=1}^n a_{0j} z_j}, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

ここで c は $\mathbb{B}^n$ 上の正則函数で零点を持たないもの．$(a_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ は $SU(n, 1)$ の元.

Theorem 0.4 ([4]). $p > 1$, $q > 0$ のとき, $\mathrm{Aut}(D^{p,q}) = GU(p, q)$.

Corollary 0.1 はこれらの位相群がそれぞれ異なることからの帰結となっている．正則自己同型群による特徴づけの反例も存在する.

Corollary 0.2 ([3]). $p, q > 1$, $p \neq q$ とする．このとき $D^{p,q} \not\simeq D^{q,p}$ であるが, $\mathrm{Aut}(D^{p,q}) = \mathrm{Aut}(D^{q,p})$.

参考文献

[1] J. Byun, A. Kodama and S. Shimizu, A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and a Euclidean space. Forum Math. **18** no. 6, 983–1009 (2006).

[2] A. V. Isaev and N. G. Kruzhilin, Effective actions of the unitary group on complex manifolds, Canad. J. Math. **54**, no. 6, 1254–1279 (2002)

[3] J. Mukuno, Y. Nagata, On a characterization of unbounded homogeneous domains with boundaries of light cone type, to appear Tohoku Math. J.

[4] Y. Nagata, Effective Actions of the General Indefinite Unitary Groups on Holomorphically Separable Manifolds, arXiv:1506.03940.