

A remark on the algebraic dimension of twistor spaces

本多宣博 (東工大理工)

ツイスター空間は実 4 次元多様体上の自己双対計量から自然に生じる 3 次元複素多様体である。コンパクトなツイスター空間の小平次元は $-\infty$ であり、generic なものの代数次元は 0 である。Campana (JDG 1991 年) により、代数次元が 3、すなわち Moishezon となるツイスター空間は、 $n\mathbb{CP}^2$ ($=n$ 個の $\mathbb{CP}^2$ の連結和、ただし $0\mathbb{CP}^2 = S^4$) 上の自己双対計量からくることが知られている。

代数次元が 2 のコンパクトツイスター空間は、藤木 (JMSJ 2002 年) により、 $n\mathbb{CP}^2$ 上の自己双対計量か、 $(S^3 \times S^1) \# n\mathbb{CP}^2$ ($n \geq 0$) を不分岐有限被覆にもつ多様体上の自己双対計量からくることが知られている。後者については、 $S^3 \times S^1$ 上の代数次元が 2 のツイスター空間が Pontecorvo により初等的な方法で構成されている。 $(n \geq 1$ のときそのようなツイスター空間の存在は知られていないと思われる。) 一方、前者については、 $n < 4$ ならば $n\mathbb{CP}^2$ 上には代数次元が 2 のツイスター空間は存在しない。また、 $4\mathbb{CP}^2$ 上には代数次元が 2 のツイスター空間が存在することが Campana-Kreussler (PAMS 1999 年) により示されており、その構造についてかなり詳しいことがわかっている。

$n > 4$ のときにも $n\mathbb{CP}^2$ 上に代数次元が 2 のツイスター空間が存在することを期待するのは自然であるが、これは見かけよりも微妙な問題である。本講演では、 $n > 4$ のとき、ツイスター空間にある単純な条件を課するとその代数次元は 2 にはならないという、筆者と B. Kreussler による最近の結果を紹介する。この条件は、基本線形系が 1 次元以上というものである。基本線形系とは、反標準束の半分 (ツイスター空間上ではいつでもこのような半分がある) が定める線形系のことである。ただし、 $n > 4$ のとき $n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間の基本系は 0 次元にも空にもなり得るので、 $n > 4$ のときに $n\mathbb{CP}^2$ 上に代数次元が 2 のツイスター空間が存在するかは未解決であると考えられる。詳細は下記の論文を参照していただきたい。

[HK] N. Honda, B. Kreussler, *Algebraic dimension of twistor spaces whose fundamental system is a pencil*, arXiv:1510.07232