2 次元特異点の幾何種数イデアルと次数 1 の楕円型特異点について

奥間智弘

この講演では，幾何種数イデアル (p_g-ideal) の概念と基本的な結果を紹介し，応用として次数 1 の Gorenstein 楕円型特異点の特徴づけについて述べる．幾何種数イデアルは日本大学の渡辺敬一氏と吉田健一氏との共同研究において導入したものであり，可換環論的な観点から研究が進められている ([1], [2], [3])．

(V, o) を複素 2 次元正規特異点，$\pi\colon X \to V$ を特異点解消，E をその例外集合とする．E に台を持つ因子をサイクルとよぶ．(V, o) の局所環を $\mathcal{O}_{V,o}$, その極大イデアルを $\mathfrak{m}$ と表す．

$I \subset \mathcal{O}_{V,o}$ を $\mathfrak{m}$-準素整閉イデアルとすると，特異点解消 $\pi\colon X \to V$ とサイクル $Z > 0$ が存在して, $I\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-Z)$ かつ, $I = I_Z := (\pi_*\mathcal{O}_X(-Z))_o$ と書ける．このとき, I はこの特異点解消上で**表現されている**という．$p_g(V, o) := h^1(X, \mathcal{O}_X) := \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathcal{O}_X)$ を (V, o) の**幾何種数**という．$h^1(X, \mathcal{O}_X(-Z))) = p_g(V, o)$ であるとき，I_Z を**幾何種数イデアル** (p_g-ideal) という．(一般には $h^1(X, \mathcal{O}_X(-Z)) \le p_g(V, o)$ が成立する.) なお，(V, o) が有理特異点のときは，任意の $\mathfrak{m}$-準素整閉イデアルは幾何種数イデアルである．

Proposition 1. $I = I_Z$, $I' = I_{Z'}$ を $\mathfrak{m}$-準素整閉イデアルとする．

(1) I, I' は幾何種数イデアル $\Leftrightarrow$ II' は幾何種数イデアル．

(2) I は幾何種数イデアル, $\mathfrak{m} = I_M \Rightarrow \mu(I) := \dim_{\mathbb{C}} I/\mathfrak{m}I = -MZ + 1$.
ここで，$\mu(\mathfrak{m})$ は埋め込み次元とよばれる．

任意の 2 次元特異点に対し，幾何種数イデアルは無数に存在する．

Theorem 2. $f \in \mathfrak{m}$ *に対し，特異点解消* $\pi\colon X \to V$ *とサイクル* $Z > 0$ *が存在して,* $\mathrm{div}_X(f) = Z + H$ *(*H *は例外成分を持たない),* I_Z *は幾何種数イデアル．*

Theorem 3. (V, o) *が Gorenstein 特異点のとき，*$\mathfrak{m}$ *が幾何種数イデアルになるための条件は* (V, o) *が maximally elliptic of degree* 1 *になることである．*

References

[1] T. Okuma, K.-i. Watanabe, and K.-i. Yoshida, *Good ideals and p_g-ideals in two-dimensional normal singularities*, arXiv:1407.1590.

[2] ———, *Rees algebras and p_g-ideals in a two-dimensional normal local domain*, arXiv:1511.00827.

[3] ———, *A characterization of two-dimensional rational singularities via Core of ideals*, arXiv:1511.01553.

山形大学理学部数理科学科
E-mail address: okuma@sci.kj.yamagata-u.ac.jp

This work was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 26400064.
2015 年度多変数関数論冬セミナー（2015 年 12 月 25 日-27 日）．