非可換局所類体論の幾何的実現について

伊藤 哲史
(京都大学大学院理学研究科)

局所類体論は p 進体 K のアーベル拡大を統制する理論であり，乗法群 $K^\times$ と最大アーベル拡大 K^{ab}/K の Galois 群の間に，(不思議な) 単射

$$\mathrm{Art}_K\colon K^\times \hookrightarrow \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$$

(**Artin 相互写像**) が存在することを主張します．当初，局所類体論は大域類体論を用いて証明されましたが，現在では大域類体論を経由しない局所的証明が知られています．また，Lubin-Tate 形式群を用いた Artin 相互写像の幾何的構成も知られています (局所類体論の幾何的実現)．

最近では，局所類体論の壮大な一般化として**局所 Langlands 予想**が研究されています. これは，代数群 G に対して，$G(K)$ の既約許容表現の組 (L パケット) と，連続 ℓ 進表現

$$\rho\colon\ \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \longrightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

が (不思議なことに) 対応するというものです ($\widehat{G}$ は G の双対群と呼ばれる代数群，ℓ は p と異なる素数)．さらに，ある種の群 G に対しては，形式群の変形理論から作られる **Rapoport-Zink 空間**のエタール・コホモロジーを用いることで対応が構成されることも予想されています (非可換局所類体論の幾何的実現)．

$G = GL(n)$ の場合の局所 Langlands 予想には，Harris-Taylor, Henniart によって，志村多様体・保型表現・Galois 表現を大掛かりに用いた「大域的証明」が与えられています．しかし，対応する Rapoport-Zink 空間の "仕組み" は複雑で，少しずつ様子は分かってきたものの完全に解明されているとは言えません．一般の G では，局所 Langlands 予想も未解決ですし，Rapoport-Zink 空間の幾何学は依然として謎だらけです.

この講演では，局所 Langlands 予想やRapoport-Zink 空間の説明からはじめて，Rapoport-Zink 空間の研究について最近分かってきたことを紹介したいと思います．数論幾何・表現論双方の進展により，$GL(n)$ 以外の場合 (斜交群 $GSp(4)$ やユニタリ群 $U(3)$ など) についても少しずつ様子が分かってきたので，それについても触れたいと思います (三枝洋一氏 (京都大学) との共同研究)．

集中講義では大域的な話 (志村多様体の基礎) が中心になるので，談話会では少し視点を変えて，局所的な話を中心にしたいと思います.