

2009 年 6 月 8 日 (月)

基礎数学からの展開 A・レポート問題

楕円曲線の数論幾何 (担当：伊藤哲史)

以下の問題のうち 1 問以上に解答するか、または、授業内容を踏まえて楕円曲線に関するレポート (テーマは自由) を作成して提出せよ。

提出先 数学教室事務室 (理学部 3 号館 1 階)

締め切り 7 月 13 日 (月), 17:00

※ この講義の単位を取得するためには、宍倉先生のレポート問題にも解答する必要があるので注意すること。

問題 1. 楕円曲線 $y^2 = x^3 + 3$ 上の有理点 $P(1, 2)$ に対し, $[2]P, [3]P, [4]P$ を求めよ.

問題 2. 楕円曲線 $y^2 = x^3 - 36x$ 上の有理点 $P(-3, 9), Q(-2, 8)$ に対し, $P + Q, P - Q, [2]P, [2]Q$ を求めよ. (注意: $P + Q, P - Q$ は楕円曲線の群演算に関する加法・減法です.)

問題 3. 楕円曲線 $y^2 = x^3 - 4$ には無限個の有理点が存在することを示せ. (ヒント: 有理点 $P(5, 11)$ は使えないか?)

問題 4. 楕円曲線 $y^2 = x^3 + 17$ には $(-2, \pm 3), (4, \pm 9)$ など全部で 16 個の整数点が存在することが知られている. それらをできるだけ沢山求めよ. (ヒント: $P(-2, 3), Q(4, 9)$ から作れないか?)

問題 5. 楕円曲線 $y^2 = x^3 - 43x + 166$ の有理点 $P(3, 8)$ はねじれ点である. P の位数 (すなわち $[n]P = O$ となる最小の $n > 0$) を求めよ. (余裕のある人はナゲル・ラッツの定理を用いてこの楕円曲線上のねじれ点を全て求めてください.)

問題 6. 素数 $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$ に対し, 楕円曲線 $y^2 = x^3 + x + 1$ の $\mathbb{F}_p$ -有理点の個数を求めよ. ハッセの定理が成り立っていることを確かめよ. (無限遠点も含めて数えること. コンピュータを使える人は, もっと多くの p について数えてみてください.)