基礎数学からの展開 **A** (2009 年度前期の前半・伊藤担当) 2009 年 6 月 15 日 (月)

楕円曲線の数論幾何 (第 7 回)

1. 楕円曲線と保型形式

重さ 2 の保型形式 $f(q) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2(1-q^{11n})^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ の展開係数で a_p を定める．また，素数 $p \neq 11$ に対し，楕円曲線 $E : y^2 + y = x^3 - x^2$ の $\mathbb{F}_p$-有理点の個数を $\#E(\mathbb{F}_p)$ とおく．このとき，$a_p = p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p)$ が成り立つ．(L 関数の一致)

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
a_p	-2	-1	1	-2	1	4	-2	0	-1	0	7	3	-8	-6	8
$\#E(\mathbb{F}_p)$	5	5	5	10	—	10	20	20	25	30	25	35	50	50	40

p	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
a_p	-6	5	12	-7	-3	4	-10	-6	15	-7	2	-16	18	10	9
$\#E(\mathbb{F}_p)$	60	55	50	75	75	70	90	90	75	105	100	120	90	100	105

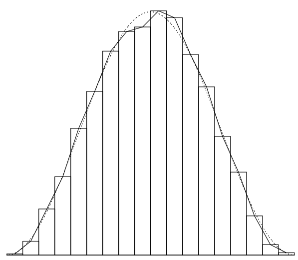
p	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197
a_p	8	-18	-7	10	-10	2	-7	4	-12	-6	-15	7	17	4	-2
$\#E(\mathbb{F}_p)$	120	150	145	130	160	150	165	160	180	180	195	175	175	190	200

p	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
a_p	0	12	19	18	15	24	-30	-8	-23	-2	14	10	-28	-2	-18
$\#E(\mathbb{F}_p)$	200	200	205	210	215	210	270	250	275	260	250	260	300	280	300

2. 佐藤 - テイト予想

$p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p) = 2\sqrt{p}\cos\theta_p$ $(0^\circ \leqq \theta_p \leqq 180^\circ)$ とおく．(11 を除く) 最初の 1900 個の素数について，10° ごとに θ_p の表を作ると，$\sin^2\theta$ の形に分布する．

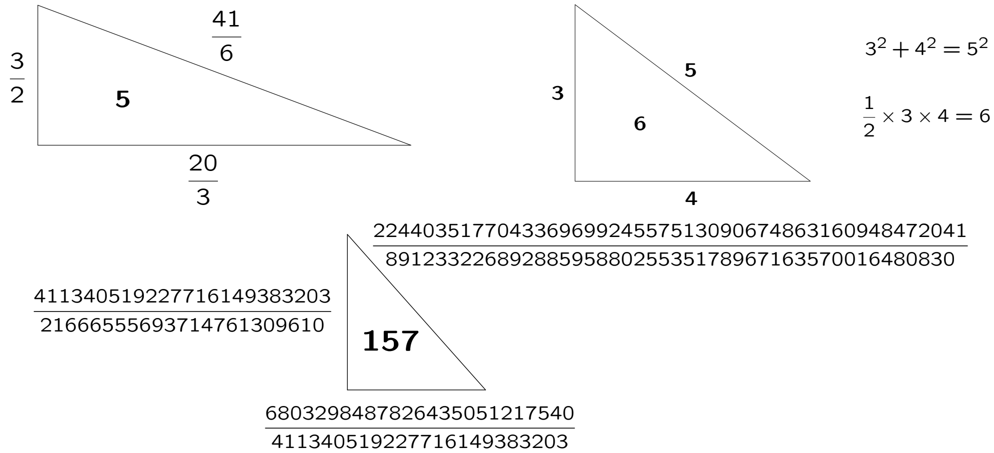
$0^\circ \leqq \theta < 10^\circ$	1	$60^\circ \leqq \theta < 70^\circ$	177	$120^\circ \leqq \theta < 130^\circ$	146
$10^\circ \leqq \theta < 20^\circ$	12	$70^\circ \leqq \theta < 80^\circ$	194	$130^\circ \leqq \theta < 140^\circ$	103
$20^\circ \leqq \theta < 30^\circ$	40	$80^\circ \leqq \theta < 90^\circ$	198	$140^\circ \leqq \theta < 150^\circ$	72
$30^\circ \leqq \theta < 40^\circ$	68	$90^\circ \leqq \theta < 100^\circ$	212	$150^\circ \leqq \theta < 160^\circ$	34
$40^\circ \leqq \theta < 50^\circ$	110	$100^\circ \leqq \theta < 110^\circ$	206	$160^\circ \leqq \theta < 170^\circ$	9
$50^\circ \leqq \theta < 60^\circ$	142	$110^\circ \leqq \theta < 120^\circ$	174	$170^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$	2



3. 直角三角形の面積とバーチ - スイナートン＝ダイヤー予想

問題. 3 辺の長さが有理数の直角三角形の面積となる自然数を**合同数**という．どのような n が合同数か？

例えば，5,6,157 は合同数だが，1 は合同数でない．(問題：7 は合同数であることを示せ．)



合同数判定予想. $n \geq 1$ を奇数で，平方数で割れないとする．次の (1),(2),(3) は同値である．(n が偶数の場合の予想もある．)

(1) n は**合同数**である．3 辺の長さが有理数の直角三角形で面積が n のものが存在する．

(2) 楕円曲線 $E_n : y^2 = x^3 - n^2x = x(x+n)(x-n)$ に**無限個の有理点が存在する**.

(3) 「$n = 2x^2 + y^2 + 32z^2$ の整数解の個数」の 2 倍が,「$n = 2x^2 + y^2 + 8z^2$ の整数解の個数」に等しい.

(1) $\Leftrightarrow$ (2)： $E_n(\mathbb{Q})$ のねじれ点は $O, (0,0), (\pm n, 0)$ のみである (それほど難しくない)．n が合同数なら，$x^2 + y^2 = z^2$，$\frac{1}{2}xy = n$ をみたす有理数 $0 < x < y < z$ が存在する．$a = \frac{z^2}{4}$，　$b = \frac{(y^2-x^2)z}{8}$ とおけば，$(a, \pm b) \in E_n(\mathbb{Q})$ は無限位数の有理点である．逆に，$P \in E_n(\mathbb{Q})$ を無限位数の有理点とする．$[2]P = (a,b)$ とおくと，$b^2 = a(a+n)(a-n)$ から $\sqrt{a},\ \sqrt{a+n},\ \sqrt{a-n} \in \mathbb{Q}$ であり，$x = \sqrt{a+n} - \sqrt{a-n},\ y = \sqrt{a+n} + \sqrt{a-n},\ z = 2\sqrt{a}$ とおくと，$x^2 + y^2 = z^2$，$\frac{1}{2}xy = n$ をみたすから n は合同数である.

(2) $\Rightarrow$ (3)：タンネルの定理 (志村対応，ヴァルジュプルジェの定理)

(3) $\Rightarrow$ (2) は未解決．**バーチ - スイナートン＝ダイヤー予想** (の一部)

$$\#E_n(\mathbb{Q}) = \infty \iff L(E,1) = 0$$

が正しければ成り立つ. (「$\#E_n(\mathbb{Q}) = \infty \Rightarrow L(E,1) = 0$」はコーツ - ワイルズの定理)

(3) の条件は容易に確認できる.「E_n の有理点が有限個」の十分条件が得られる ((2) $\Rightarrow$ (3) の対偶)．しかし,「E_n の有理点が無限個」であることを有限回の計算で判定する方法は知られていない.