



# はじめに

整数論・数論幾何関連分野における大きな進展.

2006年 **佐藤 - テイト予想** (楕円曲線の  $\text{mod } p$  有理点の個数の分布)

クローゼル, ハリス, シェパード=バロンとの共同研究に基づき

テイラーが(多くの場合に)解決

2007年 **セール予想** ( $\mathbb{Q}$ の2次元  $\text{mod } \ell$  ガロア表現の保型性予想)

テイラー, キシンの画期的な仕事を受けて,

カーレ, ヴァンテンベルジェが解決

ワイルズ, テイラーによる**谷山 - 志村予想**, **フェルマーの最終定理**の証明の手法をさらに一般化・精密化することで証明.

# この講演では

- 佐藤 - テイト予想とは

— 今までは “果てしなく難しい予想” と思われていた.

- 証明の背後にある「非可換類体論」「ガロア表現の保型性予想」

- セール予想とは

- 佐藤 - テイト予想・セール予想の証明の方針

現代数論幾何の深い定理を総動員. (ゼータ関数・ $L$ 関数, 保型表現の様々な “持ち上げ”, 志村多様体, エタールコホモロジー, 保型表現に伴うガロア表現, ガロア表現の変形・枠付き変形)

- 最近の進展・今後の展望

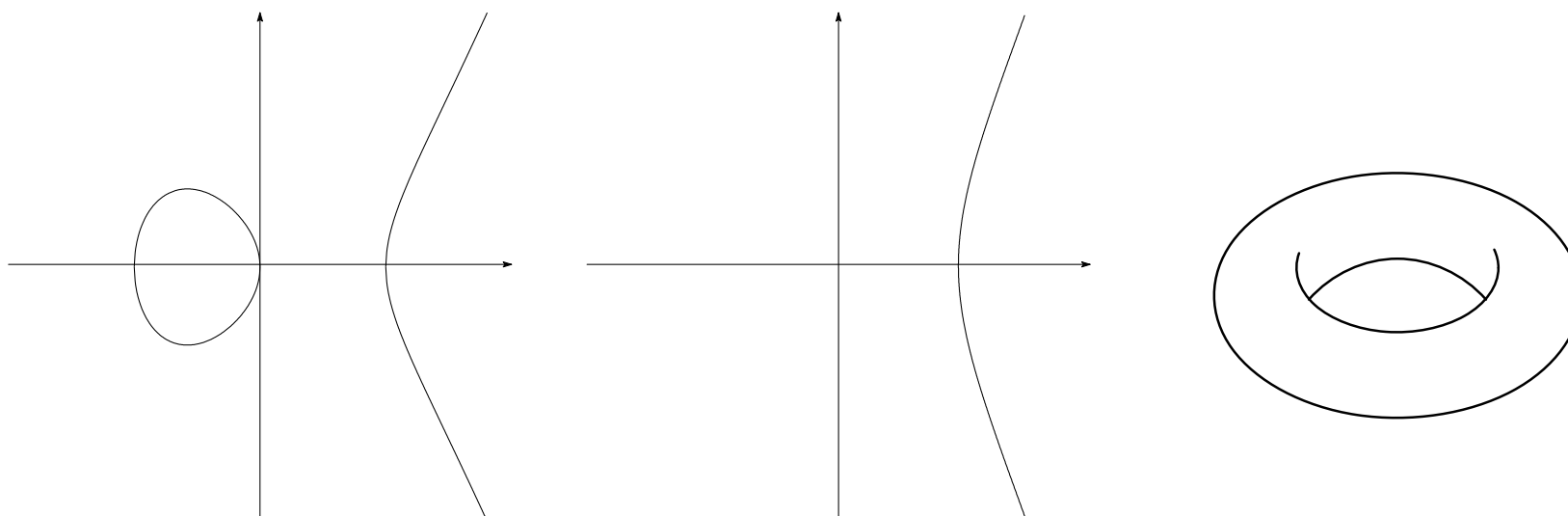
などについて, 傍観者の視点から 紹介する.

# 佐藤 - テイト予想

**楕円曲線**とは, 3次方程式

$$E : y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b \text{ は整数, } 4a^3 + 27b^2 \neq 0)$$

で定義された曲線のこと. (注: 楕円曲線(3次式)  $\neq$  楕円(2次式))



**種数 1 の代数曲線.**  $\mathbb{C}$ 上ではドーナツの形(2次元トーラス)

整数論, 代数幾何学, 複素関数論, 位相幾何学などで深く研究

楕円曲線  $E : y^2 = x^3 + ax + b$  ( $a, b$ は整数,  $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ ) の  
整数論的性質を研究したい.

$p \geq 5$  :  $4a^3 + 27b^2$  を割らない素数 (“良い” 素数)

$\mathbb{F}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  : 位数  $p$  の有限体

四則演算ができる. ( $p$  で割った余りを同一視する. )

$$\begin{aligned} \#E(\mathbb{F}_p) &= (E \text{ の } \mathbb{F}_p\text{-有理点の個数}) \\ &= \#\{(x, y) \mid x, y \text{ は整数, } 0 \leq x, y \leq p-1, \\ &\quad y^2 - (x^3 + ax + b) \text{ が } p \text{ で割り切れる}\} + 1 \quad (\text{無限遠点}) \end{aligned}$$

問題 (楕円曲線の非可換相互法則)

$p$  を動かしたとき,  $\{\#E(\mathbb{F}_p)\}_p$  はどのように分布するか?

定理 (ハッセ, 1933年)

$$p + 1 - 2\sqrt{p} \leq \#E(\mathbb{F}_p) \leq p + 1 + 2\sqrt{p}$$

そこで,

$$p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p) = 2\sqrt{p} \cos \theta_p \quad (0 \leq \theta_p \leq \pi)$$

とおく.

問題 (楕円曲線の非可換相互法則 (2))

$p$  を動かしたとき, ハッセの定理の “誤差項” を表す角度  $\{\theta_p\}_p$  はどのように分布するか?

## 佐藤 - テイト予想 (佐藤幹夫, 1963年春)

$$E : y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b \text{ は整数}, 4a^3 + 27b^2 \neq 0)$$

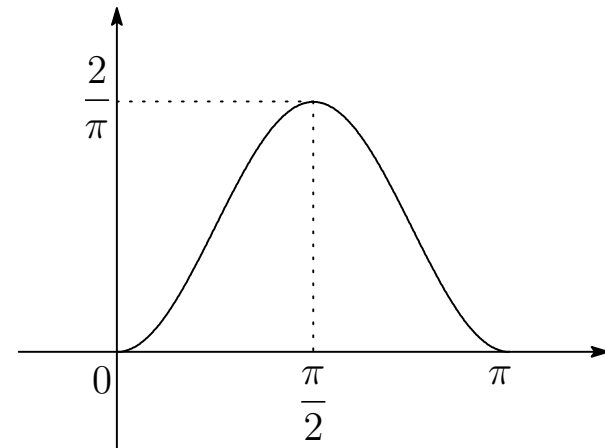
$E$  は虚数乗法を持たないと仮定する.

$\theta_p$  ( $0 \leq \theta_p \leq \pi$ ) を  $p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p) = 2\sqrt{p} \cos \theta_p$  で定める.

このとき, 任意の  $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$  に対し, 以下が成り立つ.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{p \mid p \text{ は素数}, p \leq N, \alpha \leq \theta_p \leq \beta\}}{\#\{p \mid p \text{ は素数}, p \leq N\}} = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sin^2 \theta \, d\theta$$

『角度  $\{\theta_p\}_p$  は  $y = \frac{2}{\pi} \sin^2 \theta$   
のグラフの形に分布する』



2006年春：クローゼル，ハリス，シェパード＝バロン，テイラーが  
(多くの場合に)佐藤 - テイト予想を解決.

Publ. Math. IHES 108 (2008), 1–181 & 183–239, Ann. of Math. (to appear)



定理 もし， $E$  の  $j$ -不変量

$$j(E) = \frac{1728 \cdot 4a^3}{4a^3 + 27b^2}$$

が整数でなければ，佐藤 - テイト予想は正しい。

より一般に総実代数体上の楕円曲線  $E$  で  $j(E)$  が代数的整数でないもの  
に対し，同様の定理を証明している。



# 佐藤 - テイト予想・非可換類体論の歴史

**1963年** 「佐藤予想」の定式化, 「テイト予想」の提出

**1968年** セール「 $\ell$ 進アーベル表現と楕円曲線」, 対称積  $L$  関数

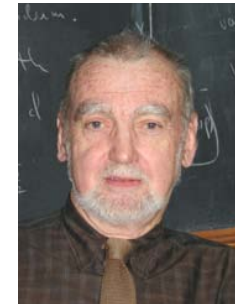
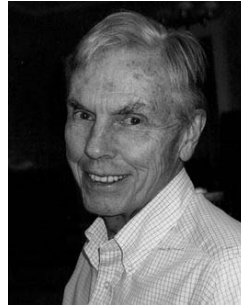
**1970年**～ 保型表現論の進展, 保型  $L$  関数の研究, 保型表現の様々な  
“持ち上げ定理”, 非可換類体論の定式化 (ラングランズ予想)  
エタールコホモロジー, ヴェイユ予想・ラマヌジャン予想の解決

**1980年**～ 志村多様体論の進展, 岩澤主予想 (メイザー - ワイルズ)  
ガロア表現・ $p$ 進ホッジ理論の進展

**1990年**～ 谷山 - 志村予想 (半安定な場合), フェルマーの最終定理  
 $GL_n$  の局所ラングランズ予想 ( $n$ 次元非可換局所類体論)

**2001年**～ 谷山 - 志村予想の完全解決, 佐藤 - テイト予想 (多くの場合)  
セール予想の解決,  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  の  $p$ 進ラングランズ対応の確立

1963年春： 計算機による実験結果に基づき佐藤幹夫が予想  
テイト，セールが  $L$  関数を用いて理論的背景を整理



アイデア ゼータ関数・ $L$ 関数を定義する. それらの解析的性質 (極・  
零の位置など) から, 素数に関する密度定理を得る.

密度定理の例 算術級数定理 (ディリクレ), 素数定理 (アダマール,  
ド・ラ・ヴァレ=プーサン)

佐藤 - テイト予想 = “非可換密度定理”

## L関数・対称積L関数

$$\alpha_p = \sqrt{p}e^{i\theta_p}, \quad \beta_p = \sqrt{p}e^{-i\theta_p} \quad (\text{フロベニウス元 } \mathbf{Frob}_p \text{ の固有値})$$

$$L(s, E) = \prod_p \frac{1}{(1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \beta_p p^{-s})} \quad (\text{L関数})$$

$$L(s, E, \mathbf{Sym}^n) = \prod_p \prod_{k=0}^n \frac{1}{1 - \alpha_p^k \beta_p^{n-k} p^{-s}} \quad (\text{対称積L関数})$$

楕円曲線に伴う  $\ell$ 進ガロア表現の対称積

$$\mathbf{Sym}^n \rho_{E, \ell}: \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathbf{GL}_{n+1}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

は既約表現で, そのL関数は  $L(s, E, \mathbf{Sym}^n)$  に等しい.

定理 (テイト, セール) もし,

『 $L(s, E, \mathbf{Sym}^n)$  が  $\mathbf{Re}(s) \geq 1 + \frac{n}{2}$  で正則かつ零点を持たない』

ならば, 佐藤 - テイト予想は正しい.

方針  $L(s, E, \mathbf{Sym}^n)$  を保型形式・保型表現の  $L$  関数と結びつけることで、その解析的性質を調べる.

非可換類体論によれば、 $(n+1)$ 次元ガロア表現  $\mathbf{Sym}^n \rho_{E,\ell}$  は保型的であるはず. すなわち、

$$L(s + \frac{n}{2}, \mathbf{Sym}^n \rho_{E,\ell}) = L(s + \frac{n}{2}, E, \mathbf{Sym}^n) = L(s, \pi)$$

をみたす  $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  の保型表現  $\pi$  が存在するはず.

( $n = 1$  の場合が谷山 - 志村予想. )

⇒ 対称積  $L$  関数  $L(s, E, \mathbf{Sym}^n)$  が良い解析的性質を持つ

⇒ 佐藤 - テイト予想

クローゼル, ハリス, シェパード=バロン, テイラーは,  $\mathbf{Sym}^n \rho_{E,\ell}$  に対する非可換類体論を弱い形 ( $\mathbf{Sym}^n \rho_{E,\ell}$  の**潜保型性**) で証明し, その系として佐藤 - テイト予想を証明した. (**保型性は未解決**)

定理 (クローゼル, ハリス, シェパード=バロン, テイラー)

任意の**奇数**  $m$  に対し, **総実代数体**  $F/\mathbb{Q}$  が存在して, 任意の**奇数**  $n \leq m$  に対し,  $\mathbf{Sym}^n \rho_{E,\ell}$  の制限

$$(\mathbf{Sym}^n \rho_{E,\ell})|_F : \mathbf{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathbf{GL}_{n+1}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

は**保型的**である.

この定理 + **ブラウアー誘導定理** + “ $\alpha$ ”

(アーサー - クローゼル基底変換定理 (の逆), ランキン - セルバーグ積)

$\Rightarrow$  佐藤 - テイト予想



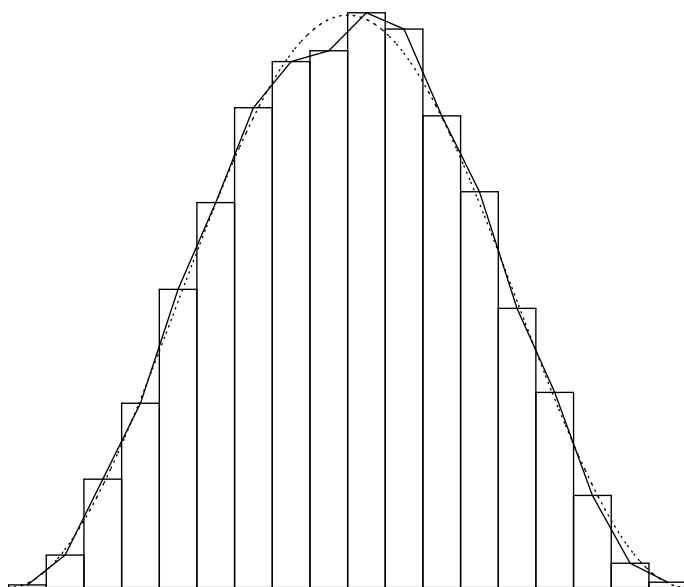




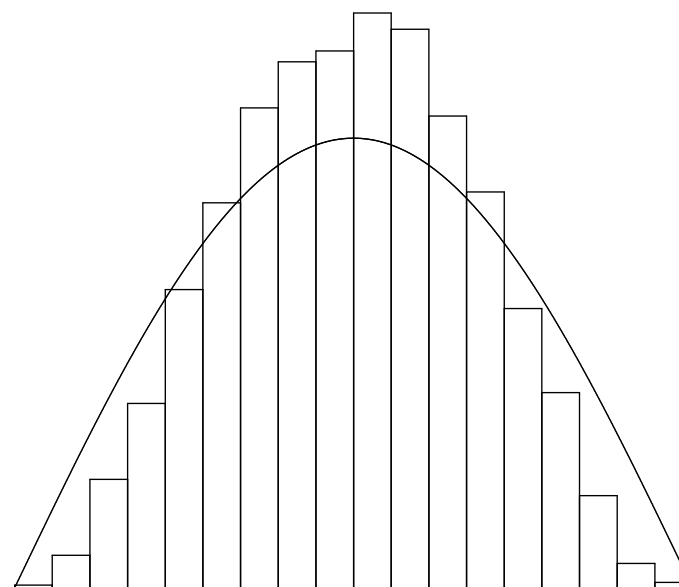


**資料4 (導手11の楕円曲線での実験結果. 最初の1900個の素数(11を除く)で計算)**

|                                   |     |                                     |     |  |     |
|-----------------------------------|-----|-------------------------------------|-----|--|-----|
| $0^\circ \leq \theta < 10^\circ$  | 1   | $60^\circ \leq \theta < 70^\circ$   | 177 | $120^\circ \leq \theta < 130^\circ$    | 146 |
| $10^\circ \leq \theta < 20^\circ$ | 12  | $70^\circ \leq \theta < 80^\circ$   | 194 | $130^\circ \leq \theta < 140^\circ$    | 103 |
| $20^\circ \leq \theta < 30^\circ$ | 40  | $80^\circ \leq \theta < 90^\circ$   | 198 | $140^\circ \leq \theta < 150^\circ$    | 72  |
| $30^\circ \leq \theta < 40^\circ$ | 68  | $90^\circ \leq \theta < 100^\circ$  | 212 | $150^\circ \leq \theta < 160^\circ$    | 34  |
| $40^\circ \leq \theta < 50^\circ$ | 110 | $100^\circ \leq \theta < 110^\circ$ | 206 | $160^\circ \leq \theta < 170^\circ$    | 9   |
| $50^\circ \leq \theta < 60^\circ$ | 142 | $110^\circ \leq \theta < 120^\circ$ | 174 | $170^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ | 2   |

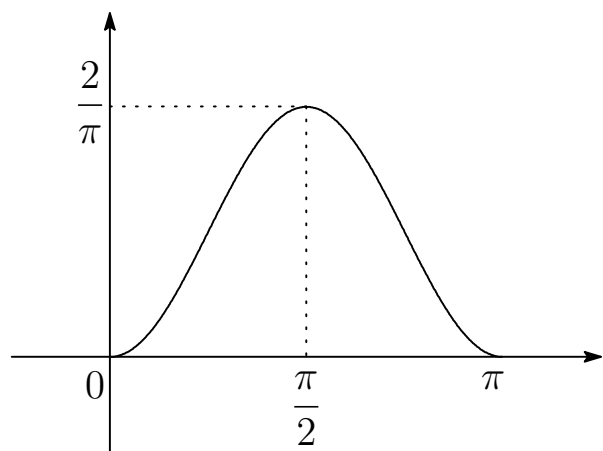


$\sin^2 \theta$  と比較



$\sin \theta$  と比較

## 資料5 (類似に注目)



と



は似ている !?

資料6 (銅鐸の進化,  $\sin \rightarrow \sin^2$ )



## セール予想

セール予想は「 $\mathbb{Q}$ の2次元 mod  $\ell$  ガロア表現の保型性予想」である.

まずは, 類体論について簡単に復習.

$\mathbb{Q}$ の類体論 (= 円分体論 =  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の1次元表現の保型性)

「 $\mathbb{Q}$ のアーベル拡大は円分拡大  $\mathbb{Q}(\zeta_N)$  ( $\zeta_N = e^{2\pi i/N}$ ) に含まれる」

「1次元ガロア表現  $\rho: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  に対し,

ディリクレ指標 ( $\text{GL}_1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現)  $\chi: (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$

が存在し, 両者の  $L$ 関数が一致する ( $\rho$ は $\chi$ に伴う)」

これを代数体に一般化したのが高木貞治, アルチンによる類体論.

## 代数体の類体論 (高木貞治, アルチン(~1920年代))

「アーベル体は**類体**である」

「 $F$  を代数体とする. 1次元ガロア表現  $\rho: \mathbf{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  に対し,

**ヘッケ指標 ( $\mathbf{GL}_1(\mathbb{A}_F)$  の保型表現)**  $\chi: \mathbb{A}_F^\times / F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  が存在し,

両者の  $L$  関数が一致する」

( $\mathbf{Gal}(\overline{F}/F)$  の **1次元表現の保型性**)

## クロネッカーの青春の夢

『虚二次体  $F$  のアーベル拡大は楕円関数

の等分点での値で生成される』

高木類体論の完成とともに解決.



非可換類体論 とは,  $L$  関数を保つ対応

$n$ 次元ガロア表現  $\leftrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  の保型表現

ガロア表現 とは, 連続準同型  $\rho: \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$  のこと.

$V$  は体  $k$  上の有限次元ベクトル空間.  $k = \mathbb{C}$  のとき  $\rho$  をアルチン表現,

$k = \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$  のとき  $\rho$  を  $\ell$  進表現,  $k = \overline{\mathbb{F}}_{\ell}$  のとき  $\rho$  を  $\bmod \ell$  表現という.

ガロア表現は代数学・方程式論の世界の対象

保型形式 (=  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  の保型表現) とは正則関数

$$f: \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

であって, 保型性をみたすもの.

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon(d)(cz+d)^k f(z) \quad (ad-bc=1, c \text{ は } N \text{ の倍数})$$

$\varepsilon: (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  を指標,  $k$  を重さ,  $N$  をレベルという.

例  $\Delta(q) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n \quad (q = e^{2\pi iz})$   
は重さ 12, レベル 1 の保型形式. (ラマヌジャンの  $\Delta$  関数)

保型形式は解析学・表現論の世界の対象

## 「保型側 $\Rightarrow$ ガロア側」 (保型形式に伴うガロア表現の構成)

定理 (アイヒラー, 志村五郎, ドリーニュ, セール (~1970年代))

$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$  を保型形式 (尖点的, ヘッケ作用素の同時固有形式) とする. 既約な2次元  $\ell$  進表現 ( $f$  に伴うガロア表現)  $\rho: \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$  が存在して, ほとんど全ての  $p$  に対し  $\mathrm{Tr} \rho(\mathbf{Frob}_p) = a_p$  をみたく.

$\mathbf{Frob}_p$  はフロベニウス元.  $\rho$  は「奇」 ( $\det \rho(\text{複素共役}) = -1$ ).

$k \geq 2$  のときは, モジュラー曲線のエタールコホモロジーをヘッケ作用素で分解して作る.  $k = 1$  のときは, 保型形式の合同性を使って重さが大きい場合に帰着.

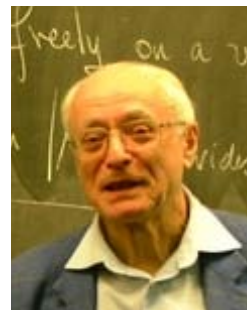


セール予想 (「ガロア側  $\Rightarrow$  保型側」の  $\text{mod } \ell$  バージョン, 1987年)

「奇」な2次元既約  $\text{mod } \ell$  表現  $\bar{\rho}: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$  に対し, 保型形式  $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$  が存在して, ほとんど全ての  $p$  に対し  $\text{Tr } \bar{\rho}(\text{Frob}_p) \equiv a_p \pmod{\ell}$  をみたす.

定理 (カーレ, ヴァンテンベルジェ (2007年))

セール予想は正しい.



※  $\bar{\rho}$  の分岐の様子から,  $f$  の **レベル** や **重さ** を具体的に決定できる.

- 定理の主張は「1つの  $\text{mod } \ell$  表現」に関するものだが、証明はとても難しい。総実代数体上のヒルベルト保型形式に伴う  $\ell$  進表現に関するありとあらゆるテクニックを総動員。
- 可約なガロア表現はアイゼンシュタイン級数に伴う。
- 「偶」なガロア表現にはマースの波動形式が伴うと予想されているが、「保型側  $\Rightarrow$  ガロア側」「ガロア側  $\Rightarrow$  保型側」ともに未解決。

- セール予想は  $\rho$  の像が可解群の場合は知られていた (ラングランズ - タンネルの定理の系). (ワイルズによるフェルマーの最終定理の証明では「 $\mathbf{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ が可解群」なことが本質的だった.)
- カーレ, ヴァンテンベルジェの定理の応用として得られるもの.
  - フェルマーの最終定理の “やさしい” 別証明 (ラングランズ - タンネルの定理, リベットのレベル下げ定理を使わない)
  - $\mathbf{GL}_2$ 型アーベル多様体やリジッドなカラビ - ヤウ多様体の保型性 (谷山 - 志村予想の高次元版)
  - 2次元「奇」なアルチン予想 : 『奇な2次元既約アルチン表現  $\rho: \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$  の  $L$ 関数  $L(s, \rho)$  は複素平面全体で正則』

## 証明の方針

佐藤 - テイト予想・セール予想は、ともに、**非可換類体論** (ガロア表現の保型性) を 特別な場合に確立 することにより証明される。

佐藤 - テイト予想 = 高次元ガロア表現の非可換類体論の**潜バージョン**  
( $\mathrm{Sym}^n \rho_{E,\ell}$ ) $|_F$  の保型性 ( $F/\mathbb{Q}$  は総実代数体)

セール予想 = 2次元ガロア表現の非可換類体論の**mod  $\ell$  バージョン**

証明には共通のテクニックが用いられる。

- **ガロア表現の整合系** を使って「 $\ell$  を動かす」 ( **$(\ell, \ell')$ -トリック**)
- **保型性の持ち上げ定理** (ガロア表現の変形・枠付き変形, テイラー - ワイルズ系)

## ガロア表現の整合系

$l$ 進ガロア表現の**整合系**とは,  $l$ 進ガロア表現の(素数 $l$ ごとの)集まり

$$\{\rho_l: \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_l)\}_l$$

であって,  $L$ 関数  $L(s, \rho_l)$  が  $l$ によらないもののこと(谷山豊).

$E$  を  $\mathbb{Q}$  上定義された楕円曲線とし,  $\rho_{E,l}: \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_l)$

を  $E$  の  $l$ 進**テイト加群**から定まる2次元ガロア表現とする.  $\{\rho_{E,l}\}_l$  は

整合系をなす. 一般に,  $\mathbb{Q}$  上の代数多様体  $X$  に対し,  $l$ 進**エタールコホ**

**モロジー**の集まり  $\{H_{\text{ét}}^*(X \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)\}_l$  は整合系をなす(と期待され

ている).

## 保型性の持ち上げ定理

$\ell$ 進ガロア表現  $\rho: \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  が保型的なら、  
 $\rho \pmod{\ell}: \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$  はもちろん保型的である。

ウィルズは、ある(技術的な)条件下で、この逆

「 $\rho \pmod{\ell}$ は保型的  $\Rightarrow \rho$ は保型的」

を示した(保型性の持ち上げ定理, テイラー-ウィルズ系の方法)。

ダイヤモンド, 藤原一宏, スキナー, キシンらにより多くの一般化・精密化が得られた。特に,  $\rho \pmod{\ell}$ が可約な場合(スキナー-ウィルズ)と, キシンによるガロア表現の枠付き変形を用いた精密化(とても弱い局所条件下での保型性の持ち上げ定理)が重要。

## 佐藤 - テイト予想の証明 (概略)

整合系と保型性の持ち上げ定理を使って「保型性の道」をつなげる.

$((\ell, \ell')$ -トリック : ワイルズによる  $(3, 5)$ -トリックの一般化)

カラビ - ヤウ多様体とモレ - ベイイーの定理を使って, 総実代数体  $F/\mathbb{Q}$

と整合系  $\{\tau_\ell: \mathbf{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathbf{GL}_{n+1}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\}_\ell$  であって,

$$\tau_\ell \equiv (\mathbf{Sym}^n \rho_{E, \ell})|_F \pmod{\ell}, \quad \tau_{\ell'} \equiv \mathbf{Ind}_K^F \psi_K \pmod{\ell'}$$

( $K$  は CM 体,  $K/F$  は  $(n+1)$  次巡回拡大,  $\psi_K$  はヘッケ指標)

となるものをうまく作る. すると,

「 $\mathbf{Ind}_K^F \psi_K$  は保型的  $\Rightarrow \mathbf{Ind}_K^F \psi_K \pmod{\ell'}$  は保型的

$\Rightarrow \tau_{\ell'}$  は保型的  $\Rightarrow \tau_\ell$  は保型的  $\Rightarrow (\mathbf{Sym}^n \rho_{E, \ell})|_F$  は保型的」

だから,  $\mathbf{Sym}^n \rho_{E, \ell}$  は潜保型的である. (技術的には**枠付き変形**を用いて**伊原の補題を回避**するところがポイント. ) Q.E.D.

## セール予想の証明 (概略)

まず, 2次元 mod  $l$  表現  $\bar{\rho}: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_l)$  を, ガロア表現の整合系  $\{\tau_\ell\}_\ell$  に埋め込む. 素数  $l' \neq l$  をとり, mod  $l'$  表現  $\tau_{l'} \pmod{l'}$  を考える. これをどんどん繰り返す. レベル ( $l$  の外の分岐) を減らしていく. セールの重さ ( $l$  での分岐) も減らしていく.

『 $l = 2, 3, 5$  のときは, 既約な 2次元 mod  $l$  ガロア表現で  $l$  の外で不分岐なものは存在しない (セール, テイト, ブルメール, クラメール, スクープ)』から, いつかは mod  $l$  表現は可約になってしまう. スキナー - ワイルズの定理を出発点にして, 「保型性の道」を どんどん辿ると, 最初に与えられた  $\bar{\rho}$  の保型性が分かる. Q.E.D.



## GL<sub>2</sub>の非可換類体論予想 — 「奇」な場合は完成に近づく (キシン)

予想 (フォンテーヌ - メイザー + ラングランズ予想)

$\rho: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  を2次元既約 $\ell$ 進表現とし, 有限個の素数を除き不分岐で, 「 $\ell$ でド・ラーム」と仮定する.

- $\rho$ が「奇」なら,  $\rho$ は正則保型形式に伴う.
- $\rho$ が「偶」なら,  $\rho$ はマースの波動形式 ( $\lambda = 1/4$ )に伴う.

$p$ 進ホッジ理論 ( $p = \ell$ ) を用いて精密な予想が定式化される.

GL <sub>$n$</sub> への一般化 : 「 $n$ 次元ガロア表現で $\ell$ でド・ラームなもの」

と「GL <sub>$n$</sub> ( $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ )の代数的な保型表現」の間の $L$ 関数を保つ対応.

専門家向け 「1つの $\ell$ 」に関する予想. 整合系, “モチーフ” は不要.

“ラングランズ双対群” などの仮想的な群も不要.

## 最近の進展・今後の展望

「 $j(E)$ が整数でない」という仮定を外す — 射程圏内に入ってきた

$GL_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現に伴うガロア表現の構成がかなりできるようになった. **基本補題**の解決(ローモン, シンゴ, ヴァルジュプルジェ)と, **ユニタリ型志村多様体・井草多様体**の研究(シン, モレルら)により, 重さが大きい場合(十分正則な場合)はOK.

**保型表現の $p$ 進族 (Eigenvariety)**の構成(ベライシュ-シュヌビエ)により, 重さが小さい場合(佐藤-テイト予想の解決に必要な場合)にもガロア表現の構成の道が開かれつつある.

## 「基礎体が総実代数体」の仮定を外す — 一般には全くできていない

定理 (I.)  $F$  を代数体 (総実とは限らない),  $E$  を  $F$  上定義された虚数乗法を持たない楕円曲線とする. もし,

1.  $j(E) \in \mathbb{Q}$  かつ  $j(E)$  は整数でない.

2.  $F/\mathbb{Q}$  は巡回拡大 (の塔) であるか, または  $[F : \mathbb{Q}] = 3$ .

が成り立てば,  $E$  に対する佐藤 - テイト予想は正しい.

証明の方針  $F/\mathbb{Q}$  が巡回拡大 (の塔) の場合 : 潜保型性とアーサー - クローゼルの巡回基底変換定理をうまく組み合わせる.

$[F : \mathbb{Q}] = 3$  の場合 : 潜保型性と JPSS の定理 (3次拡大に関するヘッケ指標からの保型誘導),  $GL(2) \times GL(3)$  から  $GL(6)$  への持ち上げ定理 (キム - シャヒディ) をうまく組み合わせる.

これ以外にも最近は様々な方向に進展がある. ほんの一部を挙げる.

- **総実でない**代数体上のガロア表現の変形,  $R = \mathbb{T}$  定理  
(メイザー, カレガリ, エマートン)
- $p$ 進保型形式の**表現論的**扱い,  $p$ 進ラングランズ対応の応用  
(キシム, コルメッツ, エマートン)
- **総実代数体**上の  $GL(2)$  のセール予想  
(バザード, ダイヤモンド, ジャービス, ジー)
- $GL(n)$  の**セール予想** (セールの重さ) の定式化 (ヘルチツヒ)
- **枠付き変形環**の構造の詳細な研究.  $R^{\text{red}} = \mathbb{T}$  定理の一般化・応用.  
(ジー, 今井)

## まとめ

最近の佐藤-テイト予想・セール予想の解決は非可換類体論に大きな進展を与えた。その証明は、ワイルズの仕事をさらに発展させたもので、多くの新しいアイデア (特に幾何学的なアイデア) に基づいている。テイラーによる潜保型性と、キシンによるガロア表現の枠付き変形が重要。既成の分野にとらわれない発想で取り組むことが大切。もちろん個々の定理は大切だが、定理の背後にある理論、定理が成り立っている“仕組み”を理解することが、これからはますます大切になってくる。最近はや若い研究者による貢献が大きい。皆さん、がんばってください。

## 参考文献

