コホモロジー論とモチーフ

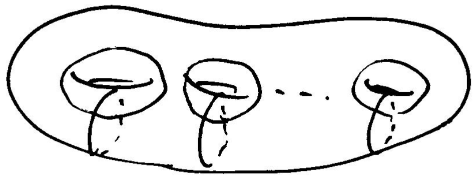
伊藤 哲史[1]

1. はじめに

本稿は2006年夏に北海道大学大学院理学研究院で行われた「整数論札幌夏の学校」における著者の講義[2]をもとにしている．講義の目的は，主に整数論を専攻とする学部生や大学院生を対象に，整数論における「モチーフ的な考え方」の重要性を解説することであった．

今日では，整数論のみならず，数学のありとあらゆる分野において細分化・専門化が進んでしまっている．多くの学生にとっては，“自分の分野” を勉強するのに精一杯で，関連する他分野のことになど構っていられないというのが実情かもしれない．しかし，早い段階でGrothendieckにより創始された「モチーフ的な考え方」に触れておくことは様々な理論・対象を統一的な視点から眺め，具体的な問題に対する本質的なアプローチを探るためにも大切なことであると思われる．歴史的に見ても，整数論における深遠な理論・定理の中には,「モチーフ的な考え方」に強い影響を受けているものも多い．

表題の**コホモロジー**とは，位相幾何学において，図形の「形」を表す群やベクトル空間である．Xを「g人乗りの浮き輪」



[1]京都大学大学院理学研究科数学教室 (email : `tetsushi@math.kyoto-u.ac.jp`)
フランス高等科学研究所 (IHES) (email : `tetsushi@ihes.fr`)
2006年9月4日(月)〜7日(木) (13:30〜15:00)

[2]講義のタイトルは「コホモロジー論とモティーフ」だったが，“motive” の日本語表記としては「モチーフ」がより一般的だと思われるので，本稿では「モチーフ」で統一することにした．

とすると，X の（特異）コホモロジーは次のようになる．

$$H^i(X,\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i=0 \\ \mathbb{Z}^{\oplus 2g} & i=1 \\ \mathbb{Z} & i=2 \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

i をコホモロジーの**次数**という[3]．図からも分かるように，X 上には $2g$ 個の「1 次元的なサイクル」があり，それに対応して，$H^1(X,\mathbb{Z})$ の階数は $2g$ となる．左辺の $\mathbb{Z}$ は**係数**であり，$\mathbb{Z}$ の代わりに $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ などの群を係数としたコホモロジーを考えることもできる．閉曲面 X に対しては，その結果は上式の両辺の $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ で置き換えたものに等しい[4]．また，より一般に，**局所系**や**層**を係数としたコホモロジーを考えることもできる．位相空間 X に対して，$\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 $H^i\big(X,\mathbb{Q}\big)$ の次元 $b_i(X)$ は，X の i 次 **Betti 数**と呼ばれ，X 上の「i 次元的なサイクル」の「個数」を表す最も基本的な位相的不変量の一つである．

本稿のテーマの一つは，**エタールコホモロジー**である．これは，上に述べた位相幾何学におけるコホモロジーの代数幾何的類似であり，Hasse や Weil による有限体上の代数多様体のゼータ関数（**Hasse-Weil ゼータ関数**）の研究を踏まえて，Grothendieck によって 1960 年代に創始された理論である．位相幾何学において，コホモロジーが位相空間の「形」を表していたのと同様に，エタールコホモロジーも代数多様体の（抽象化された意味での）「形」を表していると考えられる．特筆すべきことは，エタールコホモロジーの理論は任意の代数多様体（より一般に任意のスキーム）に対して適用可能なことである．そして，X を体 K 上の代数多様体とすると，$\overline{K}$ 上の代数多様体 $X \otimes_K \overline{K}$ のエタールコホモロジー $H^i\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big)$ は $\mathbb{Q}_\ell$ 上の有限次元ベクトル空間であり（ℓ は K で可逆な素数．$\mathbb{Q}_\ell$ は $\mathbb{Q}$ の ℓ 進完備化），自然に K の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ が作用する．すなわち，

> 『エタールコホモロジーを用いることで，代数多様体から Galois 表現（ℓ 進表現）を作ることができる』

のである．これは保型形式と Galois 表現の対応（Langlands 対応，非可換類体論の一種）への応用上も重要である．また，有限体の代数的閉包上の代数多様体のエタールコホモロジーを用いることで，**Weil 予想**（有限体上の代数多様体に対する Riemann

[3]**次元**ということもあるが，まぎらわしいので，本稿では「次数」で統一する．

[4]一般の位相空間 X に対しては，コホモロジー $H^i\big(X,\mathbb{Z}\big)$ が捩れ元を持つことがあり，その結果は若干複雑になるが，**普遍係数定理**により計算される．詳しくは，[Hat] などの位相幾何学の教科書を参照．

予想の類似）という整数論の問題を，位相幾何学的なアイデア・手法により研究することが可能になる．

本稿のもう一つのテーマは**モチーフ**である．これは，代数多様体（より一般にスキーム）のコホモロジーや，ゼータ関数，代数的サイクルなどを統一的に扱うための土台となるもので，Grothendieck によって考案された概念である．Grothendieck は**スタンダード予想**と呼ばれる予想を提出し，その予想を用いて代数多様体を代数的サイクルによって “分解” することで，モチーフを「定義」した．そして，**Weil 予想が自然に導かれる**ことを示した．しかし，スタンダード予想自身は今日でも未解決であり，その意味で，モチーフの理論は現在もなお「未完成の理論」であるといえる．

本稿は（この「はじめに」を除くと）次の 4 つの節からなり,「整数論札幌夏の学校」における 4 日間の講義内容にほぼ対応している．

- §2. 保型形式と Galois 表現
- §3. Weil 予想とエタールコホモロジー
- §4. Grothendieck の夢 — スタンダード予想とモチーフの理論，Weil 予想，Jannsen の定理
- §5. 整数論における「モチーフ的な考え方」

講義の最終日には，最近の話題として，Wiles による Fermat の最終定理の証明や，最近の Taylor らによる佐藤 - テイト予想の（多くの場合の）証明の中に,「モチーフ的な考え方」がどのように使われるかを解説したが，これについては §5 で簡単に述べるにとどめた．佐藤 - Tate 予想やそれに関連する話題については，[Tanoshimi] に詳しく書かれる予定であるので，興味を持たれた読者はそちらを参照していただきたい．また，本稿の終わりに本稿の内容と関連した演習問題と参考文献を挙げておいた．これをきっかけにさらに勉強・研究を進めていただければ幸いである．

最後に，本稿で扱っていない事項について簡単に述べておく．本稿で「エタールコホモロジー」といえば，ほとんどの場合，代数的閉体上の代数多様体に対する定数層 $\mathbb{Q}_\ell$（ℓ は基礎体で可逆な素数）を係数とするエタールコホモロジーのことである．実は，エタールコホモロジーの理論は，任意のスキームに対して展開できる．体の Spec のエタールコホモロジーを考えることで Galois コホモロジーの理論と繋がり，整数論への応用上も重要である．しかし，本稿ではこれについては一切触れなかった[5]．これ以外にも本稿で触れていない（触れることができなかった）重要なテーマとしては，

[5] これは，位相幾何学におけるコホモロジーと，体論における Galois コホモロジーはかなり雰囲気が異なるものであり，一緒に述べない方が分かりやすいだろうと考えたからである．

次のようなものがある：エタール基本群の理論，エタール ℓ 進層の理論,「重さ」の理論，三角和への応用，偏屈層の理論，Hodge 理論との類似，有限 Chevalley 群の表現論への応用，保型表現に伴う Galois 表現・志村多様体・Langlands 対応への応用，代数的サイクル・Chow 群への応用，代数多様体の周期との関係，混合モチーフの理論，モチヴィックコホモロジー，ゼータ関数の特殊値・代数的 K 理論との関係など．これらについて興味をもたれた読者は，[EGA], [SGA] はもちろんのこと，興味に応じて [Corvallis], [AnnArbor], [Seattle], [Toronto], [A1] などの参考文献に進んでいただければ幸いである．

エタールコホモロジーやモチーフという広大なテーマをこのような小文で解説し尽くすことはもちろんできないし，そのようなことは目指していない．いろいろと不備もあるとは思うが，必要に応じて参考文献などで補っていただきたい．本稿が整数論や数論幾何を勉強している学生や，これから勉強しようという人々の助けに少しでもなれば幸いである．

2008 年 3 月　マリーの森[6]にて　　著者記す．

謝辞. 「整数論札幌夏の学校」の参加者の皆様には，講義中やそれ以外の時間を通して質問・コメントをいただきました．特に，肥田晴三氏（UCLA），田口雄一郎氏（九州大）からは，保型形式や Galois 表現に関する有意義なコメントをいただきました．また，谷口隆氏（愛媛大），千田雅隆氏（東北大）には講義ノートを詳細にとっていただき，本稿を執筆する際の参考にさせていただきました．また，最後になりましたが，講演の機会をいただいた前田芳孝先生（北海道大）に感謝するとともに，著者の遅筆により本稿の完成が大変遅れてしまったことをお詫びします.

[6] Le Bois-Marie. Grothendieck によるセミナー [SGA] が行われた場所．フランス高等科学研究所 (IHES) があるが，それ以外には何も無い．

2. 保型形式と Galois 表現

本節では，エタールコホモロジーやモチーフの理論への動機付けとして，保型形式と Galois 表現（Artin 表現，ℓ 進表現，mod ℓ 表現）について簡単に復習し,「保型形式に伴う ℓ 進表現」について述べる．

2.1. **保型形式の定義．** ここでは，保型形式の定義を簡単に復習する．(詳しくは，[Se5], [Sh], [Miy], [DiS] などの保型形式の教科書を参照．)

整数を成分とする行列式が 1 の 2 次正方行列全体を $SL_2(\mathbb{Z})$ とおく．整数 $N \geq 1$ に対し，$SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(N)$ を次のように定める．

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0 \ (\mathrm{mod} N) \right\}$$

$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ を複素上半平面，$\varepsilon\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を準同形（**Dirichlet 指標**）とする．k を整数であって，$\varepsilon(-1) = (-1)^k$ をみたすものとする[7].

定義 2.1 (保型形式)**.** $\Gamma_0(N)$ に関する (k, ε)-型の**保型形式**[8]とは，複素上半平面 $\mathbb{H}$ 上の正則関数 f であって，

$$\text{任意の } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \text{ に対し，} \quad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon(d)(cz+d)^k f(z)$$

をみたし，無限遠点で正則なものをいう．N, k, ε をそれぞれ f の**レベル**，**重さ**，**指標**という．

「無限遠点で正則」の意味を説明しよう．$\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し

$$(f|_k\gamma)(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

とおく．$f|_k\gamma$ は再び $\mathbb{H}$ 上の正則関数となり $(f|_k\gamma)(z+N) = (f|_k\gamma)(z)$ をみたす．したがって，

$$(f|_k\gamma)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(f,k,\gamma,n)\, e^{2\pi i n z/N}, \qquad \varphi(f,k,\gamma,n) \in \mathbb{C}$$

という形に展開できる．条件「$n < 0 \Rightarrow \varphi(f,k,\gamma,n) = 0$」が任意の $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対してなりたつとき，f は**無限遠点で正則**であるという．さらに強く，条件「$n \leq 0 \Rightarrow$

[7]条件 $\varepsilon(-1) = (-1)^k$ をみたさない場合でも,「保型形式」を定義することはできるが，その場合は $f(z) = 0$ となってしまう．

[8]ここでいう保型形式とは “modular form” の訳語である．“modular form” をモジュラー形式と訳し，より一般の群に対する “automorphic form” を保型形式と訳し分けることも多いが，本稿では両者を特に区別せずに「保型形式」と呼ぶことにする．

$\varphi(f,k,\gamma,n)=0$」が任意の $\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対してなりたつとき，f は**尖点的**であるという．

N' を N の約数で，$N\neq N'$ とする．f を $\Gamma_0(N')$ に関する保型形式とし，$a\geq 1$ を aN' が N を割り切るような正整数とすると，$f(az)$ は $\Gamma_0(N)$ に関する保型形式となる．$\Gamma_0(N)$ に関する保型形式のうち，このようにしてレベルの小さい保型形式から得られる保型形式の線形結合で表される保型形式を**旧形式**という．**Petersson 内積**

$$\langle f,g\rangle := \int_D f(z)\,\overline{g(z)}\,y^{k-2}\,dxdy$$

（D は $\Gamma_0(N)$ の $\mathbb{H}$ への作用の基本領域）によって旧形式の空間と直交している保型形式を**新形式**という．（レベル N で初めて現れる「新しい」保型形式という意味である．§2.7 で述べる原始 Dirichlet 指標の類似である．）

$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$ であるから，$f(z+1)=f(z)$ がなりたつ．したがって，f は $q=\exp(2\pi iz)$ の関数として

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nq^n$$

という形に展開できる（**q 展開**）．q の負ベキの項が消えるのは，f が無限遠点で正則であることの帰結である．f が尖点的であれば，$a_0=0$ である．$a_1=1$ がなりたつとき，f は**正規化されている**という．

保型形式の空間には **Hecke 作用素**と呼ばれる作用素が作用している．Hecke 作用素は N を割らない素数 p に対する

$$T_p\colon f=\sum_n a_nq^n\mapsto T_pf:=\sum_n a_{pn}q^n+\varepsilon(p)p^{k-1}\sum_n a_nq^{pn}$$

および N を割り切る素数 p に対する

$$U_p\colon f=\sum_n a_nq^n\mapsto U_pf:=\sum_n a_{pn}q^n$$

がある．

保型形式の理論の中では，正規化されている尖点的な保型形式 $f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$ であって，レベル N の新形式であり，さらに Hecke 作用素の同時固有関数となっているものが特に重要である．このとき，Hecke 作用素 T_p（または U_p）の固有値が，f の q 展開における q^p の係数 a_p に等しいことが分かる．（T_pf や U_pf の q 展開おける q の 1 次の項の係数を見よ．）f の **L 関数**が Dirichlet 級数

$$L(s,f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

によって定義される．f が Hecke 作用素の同時固有関数であることを用いると，$L(s,f)$ は **Euler 積**

$$L(s,f)=\prod_{p\text{ は }N\text{ を割らない}}\frac{1}{1-a_pp^{-s}+\varepsilon(p)p^{k-1-2s}}\cdot\prod_{p\text{ は }N\text{ を割り切る}}\frac{1}{1-a_pp^{-s}}$$

を持つことが分かる．さらに $L(s,f)$ は s の実部 $\mathrm{Re}\,(s)$ が十分大きい領域で絶対収束し，複素平面全体に正則関数として解析接続され，$s\leftrightarrow k-s$ という形の関数等式をみたす.

2.2. **保型形式の例 (1)．Ramanujan の Δ 関数**

$$\begin{aligned}\Delta &= q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n\\ &= q-24q^2+252q^3-1472q^4+4830q^5-6048q^6-16744q^7+\cdots\end{aligned}$$

は最も基本的で重要な尖点的保型形式である．Δ はレベル 1，重さ 12 の保型形式であり，レベル 1 の尖点的保型形式の中では最も重さが小さい.（尖点的でない保型形式としては Eisenstein 級数などがある.）モジュライ理論的には Δ は楕円曲線の「判別式」に対応しており，整数論のみならず，複素関数論，代数幾何学，数理物理，組み合わせ論などにも現れる重要な対象である．その q 展開の係数 $\tau(n)$ は Ramanujan の **τ 関数**と呼ばれており興味深い性質を持っている.（そのうちのいくつかは，Δ に伴う ℓ 進表現を用いることで鮮やかに説明・証明することができる（[Se3]）.）

Ramanujan の τ 関数は，定義は単純だが，その具体的な性質の証明は難しい．$L(s,\Delta)$ が Euler 積を持つことを用いて，$\tau(n)$ が関係式

- $n,m\geq 1$ が互いに素なら，$\tau(nm)=\tau(n)\tau(m)$.
- 素数 p，整数 $a\geq 0$ に対し，$\tau(p^{a+2})=\tau(p)\tau(p^{a+1})-p^{11}\tau(p^a)$

をみたすことが示される（Mordell）．有名な **Ramanujan 予想**

$$\text{任意の素数 } p \text{ に対し，}\quad |\tau(p)|\leq 2p^{11/2}$$

は二項係数の和に関する初等的な主張であるにも関わらず，初等的証明はいまだに知られていない.（p のベキに現れる 11 は，Δ の重さ 12 から 1 を引いたものに等しい.）Ramanujan 予想の今日知られている唯一の証明は，久賀 - 佐藤多様体を用いて Weil 予想に帰着させる Deligne によるものである.（§3.8 を参照.）

2.3. **保型形式の例 (2).** もう一つ例を挙げよう．

$$
\begin{aligned}
f &= q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2(1-q^{11n})^2 \\
&= q-2q^2-q^3+2q^4+q^5+2q^6-2q^7-2q^9-2q^{10}+q^{11}+\cdots
\end{aligned}
$$

重さ 2, レベル 11 の自明な指標に関する保型形式である[9]．f の q 展開を

$$
f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n
$$

とおく．素数 $p\neq 11$ に対し，楕円曲線

$$
E: Y^2Z+YZ^2=X^3-XZ^2
$$

の mod p 還元の $\mathbb{F}_p$-有理点の個数を $\#E(\mathbb{F}_p)$ とおくと，

$$
a_p(E)=1+p-\#E(\mathbb{F}_p)
$$

がなりたつ．このことは，f に伴う Galois 表現が，楕円曲線 E の ℓ 進 Tate 加群（の双対）を用いて作られることを意味する．(例 2.9，定理 2.10 を参照.）これは**谷山 - 志村予想**の特別な場合である．また **Hasse の定理**（例 3.6 を参照）を用いることで，f に対する Ramanujan 予想の類似（**Ramanujan-Petersson 予想**）

$$
任意の素数\, p\, に対し，\quad |a_p|\leq 2\sqrt{p}
$$

が得られる．

2.4. **Galois 表現の定義.** ここでは Galois 表現とその L 関数について簡単に述べる．（詳しくは，[Se4], [Se6], [Se7], [Tay3] などを参照．特に，Taylor による ICM 講演録 [Tay3] は，最新の結果も踏まえて分かりやすく書かれている.）

以下，ℓ を素数とする．

定義 2.2 (Galois 表現). K を体とし，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を K の絶対 Galois 群とする．E を複素数体 $\mathbb{C}$，ℓ 進体（$\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大），有限体のいずれかとし，V を体 E 上の有限次元ベクトル空間とする．K の **Galois 表現**とは，連続準同形

$$
\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\longrightarrow GL(V)
$$

のことをいう．ここで，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ は Krull 位相に関するコンパクト位相群である．また，E が有限体か複素数体のときは，$GL(V)$ に離散位相を入れて考える．E が ℓ 進体のときは，$GL(V)$ に ℓ 進位相を入れて考える．

[9] ここでは無限積展開を持つ保型形式を挙げたが，一般の保型形式はこのような無限積展開を持つわけではない．

ρ が**既約**とは，0 でも ρ 自身でもない部分表現が存在しないことをいう．また，表現 $\rho \otimes_E \overline{E}$ が既約のとき，ρ は**絶対既約**であるという．

E が複素数体のとき，ρ を **Artin 表現**という．E が ℓ 進体のとき，ρ を ℓ **進表現**という．E が標数 ℓ の有限体のとき，ρ を **mod** ℓ **表現**という．Artin 表現や mod ℓ 表現の像は常に有限群である．したがって，Artin 表現や mod ℓ 表現を考えることと，有限次 Galois 拡大 L/K と埋め込み $\varphi\colon \mathrm{Gal}(L/K) \hookrightarrow GL(V)$ の組 $(L/K, \varphi)$ を考えることは同値である．一般に，ℓ 進表現の像は有限とは限らない．体同形 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を固定し[10]，像が有限な ℓ 進表現を Artin 表現と同一視することも多い．

ρ を体 K の ℓ 進表現とする．$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ はコンパクト群なので，その ρ による像もコンパクトである．したがって，V の基底をうまくとると，

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow GL_d(O_E) \subset GL_d(E)$$

となる．(V の次元を d とおいた．O_E は E の整数環.）m_E を O_E の極大イデアルとすると，この写像の mod m_E を考えることで，mod ℓ 表現

$$\overline{\rho}\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow GL_d(O_E/m_E) = GL_d(\kappa_E)$$

が得られる．($\kappa_E = O_E/m_E$ は E の剰余体.）$\overline{\rho}$ を ρ の**剰余表現**という．一般に，ρ が既約であっても $\overline{\rho}$ が既約とは限らない．また，$\overline{\rho}$ は ρ から一意的に決まるとは限らないが（V の基底の取り方によるかもしれない），半単純化 $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ の同値類は ρ から一意的に決まる．これは，各 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ に対して，$\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}(\sigma)$ の固有多項式が $\rho(\sigma)$ の固有多項式の mod m_E に等しいことから分かる[11]．特に剰余表現 $\overline{\rho}$ の同値類は，もし既約であれば，ρ から一意的に決まる．

整数論においては，代数体の Galois 表現が特に重要である．K を代数体とし，簡単のため各素点 v に対し，K 上の埋め込み $\overline{K} \hookrightarrow \overline{K_v}$ を固定する（K_v は v における K の完備化）．これにより，

$$\mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v) \subset \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$$

と思えるから，K の Galois 表現 ρ に対し，その $\mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v)$ への制限 $\rho_v := \rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v)}$ が考えられる．v を有限素点とし，剰余体を $\kappa(v)$ とおくと，完全系列

$$1 \longrightarrow I_v \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)) \longrightarrow 1$$

---

[10] $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ も $\mathbb{C}$ も連続濃度を持つ代数的閉体だから，Zorn の補題により，体としては同形である．

[11] $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ の同値類は各 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の固有多項式 $\det\bigl(T - \overline{\rho}^{\mathrm{ss}}(\sigma)\bigr)$ で決まる．標数 0 の体上の表現と異なり，各 σ の跡 $\mathrm{Tr}\bigl(\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}(\sigma)\bigr)$ だけでは $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ の同値類は決まらないことに注意.

が得られる．I_v を v における**惰性群**という．$\kappa(v)$ の位数を q_v とおくと，$\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v))$ は $\widehat{\mathbb{Z}}$（$\mathbb{Z}$ の副有限完備化）と同形であり，**幾何的 Frobenius 元**

$$\mathrm{Frob}_v\colon x \mapsto x^{1/q_v} \qquad (q^v \text{ 乗写像の逆写像})$$

により位相的に生成される[12]．K_v の Galois 表現は，惰性群 I_v への制限が自明となるとき**不分岐**であるといい，そうでないとき**分岐**しているという．

2.5. **Galois 表現の L 関数．** 代数体 K の ℓ 進表現や Artin 表現 ρ に対し，その L 関数 $L(s,\rho)$ が定まる．

定義 2.3 (Galois 表現の L 関数)**.** K を代数体とし，

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow GL(V)$$

を ℓ 進表現または Artin 表現とする．ρ が ℓ 進表現のときは（すなわち，V が $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大 E 上の有限次元ベクトル空間のときは），体同形 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を固定して，$\rho(\sigma)$ ($\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$) の固有値は複素数であると考える．また，$\rho$ が ℓ 進表現のときは，ρ は ℓ を割り切る素点で **de Rham** であると仮定する[13]．このとき，ρ の L 関数が Euler 積

$$L(s,\rho) = \prod_{v\text{ は有限素点}} L_v(s,\rho)$$

によって定義される．**局所因子** $L_v(s,\rho)$ の定義は次の通りである．

(1) ρ が Artin 表現か，または ρ が ℓ 進表現で剰余体 $\kappa(v)$ の標数が ℓ と互いに素である場合．惰性群 I_v により固定される元のなす部分空間を $V^{I_v} := \{v \in V \mid \rho(\sigma)v = v\ (\forall\sigma \in I_v)\}$ とおくと，Frob_v は自然に V^{I_v} に作用する．その固有値を $\alpha_{v,1},\ldots,\alpha_{v,d_v} \in \mathbb{C}$ ($d_v = \dim V^{I_v}$) とおき，局所因子を

$$L_v(s,\rho) := \prod_{i=1}^{d_v} \frac{1}{1-\alpha_{v,i}q_v^{-s}}$$

で定める．(q_v は剰余体 $\kappa(v)$ の位数である．）これを簡単に，

$$L_v(s,\rho) = \det\left(1 - q_v^{-s}\mathrm{Frob}_v; V^{I_v}\right)^{-1}$$

とも書く．

[12] 代数学の教科書では，Frob_v の逆元（単に **Frobenius 元**と呼ぶか，または “幾何的” なものと区別して**数論的 Frobenius 元**と呼ぶ）を考えるものも多いが，本稿ではすべて「幾何的 Frobenius 元」で統一して考える．エタールコホモロジーから得られる Galois 表現を考える際には，この方が自然である．(§3.5 性質 8，性質 9 を参照．)

[13] これは p 進 Hodge 理論（$p=\ell$）から来る条件であり,「ℓ を割り切る素点で**潜半安定**」とも同値である．代数多様体のエタールコホモロジーから得られる Galois 表現はすべてこの条件をみたす.

(2) ρ が ℓ 進表現で剰余体 $\kappa(v)$ の標数が ℓ に等しい場合[14]．ここでは詳しくは説明しないが，この場合は，Fontaine による D_{pst}**-関手**を用いることで，K_v の Weil-Deligne 表現 $D_{\mathrm{pst}}(\rho_v)$ が得られ，それを用いて (1) と同様に局所因子 $L_v(s,\rho)$ が定まる：

$$L_v(s,\rho) := L_v\bigl(s,\ D_{\mathrm{pst}}(\rho_v)\bigr)$$

（詳しくは [Tay3] を参照.）

2.6. Galois 表現の L 関数の解析的性質 (予想). 整数論においては,

『"良い" L 関数は複素平面全体に解析接続され，関数等式をみたすだろう.』

と広く信じられている．それでは，どのような Galois 表現が "良い" L 関数を生み出すのだろうか？後で述べる Fontaine-Mazur 予想（予想 5.1）を踏まえて，次のように予想を定式化することができる.

予想 2.4. K を代数体とし，ρ を ℓ 進表現または Artin 表現とする.（ρ が ℓ 進表現のときは，体同形 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を固定して考える.）ρ は絶対既約であり，有限個の v の外で不分岐であると仮定する．さらに，ρ が ℓ 進表現のときは，ρ は ℓ を割り切る素点で de Rham であると仮定する．このとき，ρ の L 関数 $L(s,\rho)$ は（ρ が自明表現の場合の $s=1$ における一位の極を除き）複素平面全体に正則関数として解析接続される．さらに，$L(s,\rho)$ は（適当な形の）関数等式をみたす[15].

特に予想 2.4 の仮定は既約 Artin 表現に対しては自動的にみたされるから[16]，予想 2.4 は次の古典的な予想を特別な場合として含む.

予想 2.5 (Artin 予想)**.** K を代数体とし，$n \geq 1$ とする.

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

を既約 Artin 表現とする．このとき，$L(s,\rho)$ は（$n=1$ で ρ が自明表現の場合の $s=1$ における一位の極を除き）複素平面全体に正則関数として解析接続される.

---

[14]歴史的にはこの場合を避けて議論することも多い．ℓ 進表現を個別に考えるのではなく，すべての素数 ℓ に関する ℓ 進表現の**整合系** (compatible system) を考え,『整合系に対して L 関数が定まる』と考える（谷山豊）．エタールコホモロジーを用いて作られる Galois 表現は整合系をなす（と期待されている）．しかし，現代においては,『一つの ℓ のみから L 関数が定まる』と考えることが重要である. Wiles による Fermat の最終定理の証明には，ℓ として 3 や 5 といった特定の素数をとる技法（いわゆる $(3,5)$-トリック）が用いられた（[Wi]）.

[15]Γ-因子（無限素点における局所因子）を定義して，Galois 表現 ρ のみを用いて関数等式の形を正確に予想することもできる（[Se6], [Tay3]）.

[16]像が有限な Galois 表現（Artin 表現や mod ℓ 表現）に対しては,「有限個の v の外で不分岐」は自動的にみたされる.

$n=1$ の場合は類体論の帰結である．一般の n でも，$L(s,\rho)$ が有理型関数として解析接続され,（適当な形の）関数等式をみたすことが知られている.（**Brauer 誘導定理**を用いることで，$n=1$ の場合（類体論）に帰着できる.）

$n \geq 2$ のときは，この予想が証明されているケースは少ない．Langlands-Tunnell の定理により，$n=2$ で ρ の像が可解群ならなりたつ．一般の n で ρ の像がベキ零群のときは，Arthur-Clozel によって $GL(n)$ の底変換定理の応用として証明されている（[AC]）．また，最近では，$K=\mathbb{Q}$, $n=2$ で ρ が「奇」な場合[17]の予想 2.5 が Khare-Wintenberger により証明されている.（§2.9 を参照.）

2.7. **Galois 表現の例.** Galois 表現とその L 関数の例をいくつか挙げよう．整数論に現れる "良い" L 関数の多くは，Galois 表現の L 関数として解釈される.

例 2.6 (自明表現と Riemann ゼータ関数)**.** $K=\mathbb{Q}$ とし，ρ を自明表現とする．ρ はすべての素数 p で不分岐であり，$\rho(\mathrm{Frob}_p)$ の固有値は 1 である．したがって,

$$L(s,\rho)=\prod_{p\text{ は素数}}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

が得られる．右辺の無限積を展開し，素因数分解の一意性を用いることで,

$$L(s,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=:\zeta(s)$$

が分かる（$\zeta(s)$ は **Riemann ゼータ関数**）．特に，$\zeta(s)$ は複素平面全体に解析接続され，$s=1$ における一位の極を除いて正則であり，$s\leftrightarrow 1-s$ という形の関数等式をみたす.

例 2.7 (Dirichlet 指標と Dirichlet L 関数)**.** 一般に，**円分体論**（すなわち $\mathbb{Q}$ の類体論）により，Dirichlet 指標を（1 次元）Galois 表現として解釈することができる．$N\geq 1$ とする．導手 N の**原始 Dirichlet 指標**とは，準同形

$$\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

であって，$(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times$ (M は N の約数，$M\neq N$) を経由しないものをいう．このとき，χ の L 関数が

$$L(s,\chi):=\sum_{m\geq 1,\ m\text{ は }N\text{ と互いに素}}\frac{\chi(m)}{m^s}=\prod_{p\text{ は }N\text{ を割らない素数}}\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

で定まる．一方，ζ_N を 1 の原始 N 乗根とすると，円分体論における同形

$$\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}\big)\xrightarrow{\cong}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times,\qquad \sigma\mapsto r(\sigma)\quad \big(\sigma(\zeta_N)=\zeta_N^{r(\sigma)}\big)$$

[17] すなわち，$\det\rho(c)=-1$ の場合．ここで $c\in\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ は複素共役である.

があり[18]，次の写像

$$\mathrm{Gal}\big(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\big) \longrightarrow \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}\big) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^\times \xrightarrow{a\mapsto a^{-1}} \mathbb{C}^\times$$

の合成を ρ とおけば[19]，ρ は 1 次元 Artin 表現で，

$$L(s,\rho) = L(s,\chi)$$

をみたす．**Kronecker-Weber の定理**より，$\mathbb{Q}$ のすべてのアーベル拡大はある $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ に含まれるから，このようにして，$\mathbb{Q}$ のすべての 1 次元 Artin 表現が得られることが分かる．

例 2.8 (ℓ 進円分指標)**.** K を体とし，ℓ を K で可逆な素数とする．$n \geq 1$ に対し，$\zeta_{\ell^n} \in \overline{K}$ を 1 の原始 ℓ^n 乗根とする．$\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ に対し，$\sigma(\zeta_{\ell^n})$ もまた 1 の原始 ℓ^n 乗根なので，$\sigma(\zeta_{\ell^n}) = \zeta_{\ell^n}^{r_n(\sigma)}$ ($r_n(\sigma) \in (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^\times$) と書ける．$r_n(\sigma)$ は ζ_{ℓ^n} の選び方によらず，$m \geq n$ なら $r_m(\sigma) \bmod \ell^n = r_n(\sigma)$ をみたす．写像 $\sigma \mapsto r_n(\sigma)$ の n に関する逆極限により，準同形

$$\chi_\ell\colon \mathrm{Gal}\big(\overline{K}/K\big) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^\times = \varprojlim(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^\times \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times = GL_1(\mathbb{Q}_\ell)$$

が得られる．χ_ℓ は K の 1 次元 ℓ 進表現であり，その像は一般には無限群である．χ_ℓ を K の ℓ **進円分指標**という．K が代数体なら，ℓ を割らない有限素点 v において χ_ℓ は不分岐で，$\chi_\ell(\mathrm{Frob}_v) = q_v^{-1}$ をみたす（q_v は v の剰余体の位数）．また，ℓ 進表現 $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to GL(V)$ と整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対し，テンソル積 $\rho \otimes \chi_\ell^{\otimes n}$ のことを $\rho(n)\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to GL(V(n))$ と書く．$\rho(n), V(n)$ をそれぞれ ρ, V の **Tate 捻り**という．

例 2.9 (楕円曲線の ℓ 進 Tate 加群)**.** K を体とし，E を K 上の楕円曲線とする．$n \geq 1$ に対し，E の n 等分点のなす群を

$$E[n] = \{P \in E(\overline{K}) \mid \underbrace{P + \cdots + P}_{n\text{ 個}} = O\}$$

とおく．(右辺の “$P + \cdots + P$” は $E(\overline{K})$ に定まる加法であり，$O \in E(K)$ は無限遠点（加法に関する単位元）である．）n が K で可逆であれば，$E[n]$ は階数 2 の自由 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群である．ℓ を K で可逆な素数とし，

$$T_\ell E := \varprojlim E[\ell^n], \qquad V_\ell E := \big(T_\ell E\big) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

[18] N を割らない素数 p に対し，左辺における幾何的 Frobenius 元 Frob_p（の持ち上げの像）は，右辺における p^{-1} に対応する．(p ではない！)

[19] 最後の写像 $a \mapsto a^{-1}$ が “不自然” に思われるかもしれない．これは，Galois 表現の L 関数が幾何的 Frobenius 元（p 乗写像の逆写像）により定義され，Dirichlet 指標の L 関数が（伝統的に）$\chi(p)$ で定義されることの「帳尻」をあわせるためのものである．もちろん，数論的 Frobenius 元（p 乗写像）を使って L 関数を定義することもできるのだが，エタールコホモロジーとの整合性を優先して，本稿ではあえてそうしなかった．

とおくと，$T_\ell E$, $V_\ell E$ はそれぞれ $\mathbb{Z}_\ell$, $\mathbb{Q}_\ell$ 上の階数 2 の自由加群であり，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ が自然に作用する．$T_\ell E$, $V_\ell E$ を楕円曲線 E の **ℓ 進 Tate 加群**という．$V_\ell E$ の双対空間を

$$V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}\bigl(V_\ell E,\, \mathbb{Q}_\ell\bigr)$$

とおくと，V にも自然に $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ が作用し，K の 2 次元 ℓ 進表現

$$\rho_{E,\ell}\colon \mathrm{Gal}\bigl(\overline{K}/K\bigr) \longrightarrow GL(V)$$

が得られる．V は E の 1 次エタールコホモロジー $H^1\bigl(E \otimes_K \overline{K},\, \mathbb{Q}_\ell\bigr)$ と同形である．K が位数 q の有限体 $\mathbb{F}_q$ であれば，q と互いに素な任意の素数 ℓ に対し，

$$\mathrm{Tr}\bigl(\rho_{E,\ell}(\mathrm{Frob}_q)\bigr) = 1 + q - \#E(\mathbb{F}_q)$$

がなりたつ.（$\#E(\mathbb{F}_q)$ は E の $\mathbb{F}_q$-有理点の個数である．例 3.9 を参照.）

2.8. **なぜ Galois 表現を考えることが大切なのか.** 古典的な整数論の問題のうちのいくつかは，Galois 表現の L 関数に関する問題に翻訳できる．例えば，

『どのような奇素数 p が，$p = x^2 + y^2$ （x, y は正整数）と書けるか？』

という問題（答え： 上のように書けることと，$p \equiv 1 \pmod 4$ は同値）は二次形式 $x^2{+}y^2$ が二次拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}$ のノルムであること，すなわち $\alpha = x{+}y\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ に対して α とその共役 $\overline{\alpha}$ との積が

$$\alpha\overline{\alpha} = (x + y\sqrt{-1})(x - y\sqrt{-1}) = x^2 + y^2$$

となることと，$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の類数が 1 であることに注目すると，次の写像の合成

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}) \cong \{\pm 1\} \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$$

で定まる $\mathbb{Q}$ の 1 次元 Artin 表現 ρ に対し Frob_p の行き先 $\rho(\mathrm{Frob}_p)$ を問う問題，すなわち，

『1 次元 Artin 表現 ρ の L 関数 $L(s, \rho)$ を決定せよ.』

という問題（答え：$\sqrt{-1}$ は 1 の原始 4 乗根であるから，円分体論から次が分かる．導手 4 の非自明な（唯一の）原始 Dirichlet 指標

$$\chi\colon (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \qquad 1 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto -1$$

に対し，$L(s, \rho) = L(s, \chi)$．特に，奇素数 p に対しては，$\rho(\mathrm{Frob}_p) = 1$ と $p \equiv 1 \pmod 4$ は同値）に翻訳できる．

整数論における重要な定理の中には,「素数」や「方程式」といった個々の対象を離れて,「Galois 表現」を統一的に考察することで，見通しよく説明・証明されるものも多い[20].

2.9. **保型形式に伴う Galois 表現.** 例 2.7 で述べたように，$\mathbb{Q}$ の類体論は,

$$\text{原始的 Dirichlet 指標 } \chi \ \leftrightarrow\ \mathbb{Q} \text{ の 1 次元 Artin 表現 } \rho$$

という一対一の対応として理解することができる[21]．Dirichlet 指標の「2 次元版」である保型形式に，$\mathbb{Q}$ の 2 次元 Galois 表現が対応することを述べる[22].

一般に，$\mathbb{Q}$ の 2 次元 Galois 表現 ρ が**奇** (および，**偶**) であるとは，$\det\rho(c) = -1$ (および，$\det\rho(c) = 1$) となることをいう．($c \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ は複素共役である.)

定理 2.10 ([De1], [DeS], [Ca], [Sch], [Sa] など)**.** $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ を正規化されている尖点的な保型形式であって，Hecke 作用素の同時固有関数となっているものとする．f はレベル N の新形式であると仮定する．f の重さを k，指標を ε とおく．ℓ を素数とし，体同形 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を固定する．このとき，$\mathbb{Q}$ の「奇」で絶対既約な 2 次元 ℓ 進表現

$$\rho_{f,\ell}\colon \mathrm{Gal}\big(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\big) \longrightarrow GL(V)$$

（V は $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大 E 上の 2 次元ベクトル空間）が存在し,

$$L(s,f) = L(s,\rho_{f,\ell})$$

をみたす[23]．$\rho_{f,\ell}$ を**保型形式 f に伴う ℓ 進表現**という．さらに，次がなりたつ.

(1) p を N と互いに素な素数とする．$p \neq \ell$ ならば，$(\rho_{f,\ell})_p$ は不分岐で,

$$\mathrm{Tr}\big(\rho_{f,\ell}(\mathrm{Frob}_p)\big) = a_p, \qquad \det\big(\rho_{f,\ell}(\mathrm{Frob}_p)\big) = \varepsilon(p)p^{k-1}$$

がなりたつ．特に，$\rho_{f,\ell}$ の行列式表現 $\det\rho_{f,\ell}$ は $\tau\otimes\chi_\ell^{\otimes 1-k}$ に等しい．ここで，χ_ℓ は ℓ 進円分指標であり (例 2.8)，τ は例 2.7 の対応により ε に対応する 1 次元 ℓ 進

---

[20] もちろん，整数論における重要な定理の中には，Galois 表現とは関係が無いものもある.（現在のところ関係が知られていないと言うべきか？）

[21] これは像が有限な場合である．この対応を，代数的 Hecke 指標と $\mathbb{Q}$ の 1 次元 ℓ 進表現の間の対応に拡張することもできる.

[22] 重さが 1 の保型形式に 2 次元 Artin 表現（のうち「奇」なもの）が対応し，重さが 2 以上の保型形式に（像が無限な）ℓ 進表現が対応する.

[23] ℓ 進表現 $\rho_{f,\ell}$（の同値類）が一意的であることが，$\rho_{f,\ell}$ が絶対既約であることと **Chebotarev 密度定理**からしたがう.（Chebotarev 密度定理から，ℓ 進表現 ρ の半単純化（の同値類）が，有限個を除くすべての素数 p に対する $\mathrm{Tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_p)$ の値から一意的に決まることが分かる ([Se4]).）また，$\rho_{f,\ell}$ と $\rho_{g,\ell}$ が同値であれば $f = g$ となることが，保型形式に対する**重複度一定理**からしたがう.

表現（Artin 表現）である．すなわち，N を割らない素数 p に対し，$\tau(\mathrm{Frob}_p) = \chi(p)$ がなりたつ[24].

(2) $p = \ell$ のとき，$(\rho_{f,\ell})_p$ は de Rham である．さらに，$\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包の p 進完備化を $\mathbb{C}_p$ とおくと，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の作用と可換な $\mathbb{C}_p$ 上のベクトル空間としての同形

$$V \otimes_E \mathbb{C}_p \cong \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_p(1-k) \qquad \textbf{（Hodge-Tate 分解）}$$

が存在する．左辺 $V \otimes_E \mathbb{C}_p$ に $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ は対角的に作用する．また，右辺の $\mathbb{C}_p(1-k)$ は $\mathbb{C}_p$ の Tate 捻りである[25].

(3) $k = 1$ のとき，$\rho_{f,\ell}$ の像は有限群である．また，N を割らない素数 p で $\rho_{f,\ell}$ は不分岐である．$\rho_{f,\ell}$ の同値類は ℓ によらない[26].

ここでは，多くの数学者による（Eichler，志村五郎，Deligne，Serre，Langlands, Carayol, Scholl，斎藤毅らによる）長年の結果の蓄積を一つの定理の形で書いた．$\rho_{f,\ell}$ が絶対既約であることの証明は Ribet による．保型形式 f に対応する $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現 π と局所 Langlands 対応を用いることで，N を割り切る素数 p における対応を精密に述べることができる．また，これは証明からしたがうのだが，$\rho_{f,\ell}$ が単に（抽象的に）存在するだけでなく，$k \geq 2$ の場合[27],

> 『f に伴う ℓ 進表現 $\rho_{f,\ell}$ は，久賀 - 佐藤多様体と呼ばれる $(k-1)$ 次元代数多様体（モジュラー曲線上の楕円曲線族の自己ベキにより得られる代数多様体）の $(k-1)$ 次エタールコホモロジーを用いて作られる』

という点は重要である．これを用いて，Deligne は Ramanujan 予想（および Ramanujan-Petersson 予想）を Weil 予想に帰着することにより証明した（[De1], [De2]．本稿の §3.8 も参照）．

---

[24] $\det \rho_{f,\ell} = \tau \otimes \chi_\ell^{\otimes 1-k}$ がなりたつことは，Chebotarev 密度定理の帰結である．f の重さ k と指標 ε は $\varepsilon(-1) = (-1)^k$ をみたすから（§2.1 を見よ），$\det \rho_{f,\ell}(c) = (-1)^k \cdot (-1)^{1-k} = -1$ となり，$\rho_{f,\ell}$ が「奇」であることが分かる．

[25] $\rho_{f,\ell}$ の $p = \ell$ における様子から f の「重さ k」が復元できることになる．これは p 進 Hodge 理論の帰結である．一般に，**Hodge-Tate 分解**とは次のような分解である：$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 F 上の滑らかな射影的代数多様体 Y に対し，$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の作用と可換な $\mathbb{C}_p$ 上のベクトル空間としての同形 $H^m\big(Y \otimes_F \overline{F}, \mathbb{Q}_p\big) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \cong \bigoplus_{i+j=m} H^j\big(Y, \Omega^i\big) \otimes_F \mathbb{C}_p(-i)$ がある．$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ は左辺には対角的に作用し，右辺の H^j には自明に作用する．

[26] 正確に言うと，体同形 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ の選び方による可能性はある．しかし，f の q 展開の係数 a_n はすべてある代数体に含まれるから，これはそれほど深刻なことではない．また，「$\rho_{f,\ell}$ が Artin 表現である」ことから，「重さ 1 の保型形式 f に対し，a_n は有限個の値しかとらない」という結論が得られる（[DeS]）．

[27] $k = 1$ の場合の $\rho_{f,\ell}$ の構成は，重さの大きい保型形式との間の合同性を用いるもので，若干事情が異なる（[DeS]）．

定理 2.10 は「保型形式 → Galois 表現」という対応であるが，逆方向の「Galois 表現 → 保型形式 」という対応を考えることもできる[28]．これは **Galois 表現の保型性予想**と呼ばれ，一般には難しい問題である．Wiles（[Wi]）, Taylor-Wiles（[TW]）により創始された「$R = T$ 定理」の発展により，最近では，$\mathbb{Q}$ や総実代数体上の「奇」な 2 次元 Galois 表現の保型性予想に対しては，いくつかの結果が得られるようになってきた．$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E の ℓ 進 Tate 加群により得られる 2 次元 ℓ 進表現は重さ 2 の保型形式に伴うというのが**谷山 - 志村予想**であり，Breuil-Conrad-Diamond-Taylor により完全に解決された（[BCDT]）．与えられた $\mathbb{Q}$ の既約で「奇」な 2 次元 mod ℓ 表現 ρ は，保型形式に伴う ℓ 進表現の mod ℓ で得られるというのが **Serre 予想**であり，Taylor，Shepherd-Barron らによる部分的解決の後，Taylor による「潜保型性」や Kisin による「$R^{\mathrm{red}} = T$ 定理」を用いて，Khare-Wintenberger により解決された（[SBT], [KW]）．Serre 予想に Buzzard-Taylor による p 進保型形式の "はりあわせ"（または "p 進解析接続"）の議論を組み合わせることで，**強 Artin 予想**（既約で「奇」な $\mathbb{Q}$ の 2 次元 Artin 表現が，重さ 1 の保型形式に伴うという予想）が証明され，その帰結として（$n = 2,\ K = \mathbb{Q}$ で「奇」な場合の）Artin 予想（予想 2.5）が証明された．（$\mathbb{Q}$ の 2 次元 ℓ 進表現に対する保型性予想の現状については，[Kis] やそこで引用されている文献を参照.）

2.10. **非可換類体論へ.** $\mathbb{Q}$ の 2 次元非可換類体論を

$$\text{保型形式 } f \ \leftrightarrow\ \mathbb{Q} \text{ の 2 次元 } \ell \text{ 進表現 } \rho_{f,\ell}$$

という形で理解することができる．左辺は「$GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現」の特別な場合（正則保型形式に対応する場合.「奇」な Galois 表現に対応する）である．最近では，より一般の代数体 K に対して，

$$GL_n(\mathbb{A}_K) \text{ の（代数的）保型表現 } \pi \ \leftrightarrow\ K \text{ の } n \text{ 次元（幾何的）} \ell \text{ 進表現 } \rho_{\pi,\ell}$$

という形の非可換類体論が研究されている．高次元志村多様体（モジュラー曲線の一般化）のエタールコホモロジーを用いることで，いくつかの特別な場合（K が総実代数体か CM 体で，π が様々な技術的仮定をみたす場合）には，

$$GL_n(\mathbb{A}_K) \text{ の保型表現 } \pi \text{ に伴う } n \text{ 次元 } \ell \text{ 進表現 } \rho_{\pi,\ell}$$

が構成され，整数論的応用も得られている（[Tay3], [HT], [TY], [Tanoshimi]）．

[28] $\mathbb{Q}$ の「偶」な 2 次元 Galois 表現は実解析的な保型形式（Maass の波動形式）に伴うと期待されているが，現時点では「保型形式 ↔ Galois 表現」の対応のいずれの方向も証明されていない．実解析的な保型形式に対しては，数論幾何的な手法が使えないことが一因である．

3. Weil 予想とエタールコホモロジー

ここでは，数論幾何の発展の原動力となった **Weil 予想**（有限体上の代数多様体に対する Riemann 予想の類似）と，その解決に大きな役割を果たした**エタールコホモロジー**について述べる．

3.1. Hasse-Weil ゼータ関数． まず，古典的な Riemann 予想について思い出しておこう．Riemann ゼータ関数は Dirichlet 級数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

で定義される関数である．右辺は s の実部が十分に大きいところで絶対収束し（実際には $\mathrm{Re}(s) > 1$ でよい），複素平面全体に有理型関数として解析接続され，$s = 1$ における 1 位の極を除いて正則である．また，$\zeta(s)$ は $s \leftrightarrow 1 - s$ という形の関数等式をみたす．$\zeta(s)$ は負の偶数（$s = -2,\ -4,\ -6, \ldots$）で零点（**自明な零点**）を持つ．有名な **Riemann 予想**

『$\zeta(s)$ の零点は，自明な零点以外は直線 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 上にある』

は今日でも未解決である．

素因数分解の一意性から，$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ において Euler 積

$$\zeta(s) = \prod_{p\ \text{は素数}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

をもつ．スキーム $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ の閉点は $\mathbb{Z}$ の極大イデアルに対応し，$(p) = p\mathbb{Z}$（p は素数）という形をしているから，

$$\zeta(s) = \prod_{x \in |\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}|} \frac{1}{1 - \#(\kappa(x))^{-s}}$$

という形に書ける．ここで，$|\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}|$ はスキーム $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ の閉点の集合である．(一般にスキーム X の閉点の集合を $|X|$ で表す.) また，$\kappa(x)$ は x における剰余体であり，$\#(\kappa(x))$ はその位数である．($x = (p)$ なら $\kappa(x) = \mathbb{F}_p$，$\#(\kappa(x)) = p$ である.)

定義 3.1. X を $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ 上有限型のスキームとする．このとき，X の **Hasse-Weil ゼータ関数**を Euler 積

$$\zeta(s, X) := \prod_{x \in |X|} \frac{1}{1 - \#(\kappa(x))^{-s}}$$

で定義する．右辺は s の実部が十分大きいところで収束する．

$X = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ のときに $\zeta(s, \operatorname{Spec}\mathbb{Z})$ が Riemann ゼータ関数になることを述べた．一般に $X = \operatorname{Spec} O_K$（$K$ は代数体，O_K は K の整数環）のとき，$\zeta(s, \operatorname{Spec} O_K)$ は K の **Dedekind ゼータ関数**に等しい．

任意の $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 上有限型のスキーム X に対し，$\zeta(s, X)$ は複素平面全体に有理型関数として解析接続され，さらに X が良い性質を持てば $\zeta(s, X)$ は関数等式をみたすと予想されている[29]．この予想は，エタールコホモロジーから定まる Galois 表現を用いて，Galois 表現の L 関数の問題として精密に定式化することができる[30]．しかし，(代数体の整数環の場合や，本節でこれから述べる有限体上の代数多様体の場合を除いて）証明されている例は極めて少ない．X が $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線（の Néron モデル）の場合でさえ，この予想が証明されたのは最近のことである．(谷山 - 志村予想の帰結である．)

3.2. **Weil 予想 (古典的定式化).**

補題 3.2. 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の代数多様体 X に対し，

$$\zeta(s, X) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \#X(\mathbb{F}_{q^m})\frac{(q^{-s})^m}{m}\right)$$

がなりたつ．これは両辺を $T = q^{-s}$ に関する有理数係数の形式的ベキ級数と考えたときの等式である．

証明. 閉点 $x \in |X|$ における剰余体 $\kappa(x)$ の位数を q^{m_x} とおくと，$\#(\kappa(x))^{-s} = (q^{-s})^{m_x} = T^{m_x}$ だから，左辺の log は

$$\begin{aligned}
\log\zeta(s, X) &= \sum_{x\in|X|} \log\left(\frac{1}{1-\#(\kappa(x))^{-s}}\right) = \sum_{x\in|X|} \log\left(\frac{1}{1-T^{m_x}}\right) \\
&= \sum_{x\in|X|}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(T^{m_x})^n}{n} = \sum_{x\in|X|}\sum_{n=1}^{\infty} m_x \frac{T^{(m_x n)}}{(m_x n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{x\in|X|,\ m_x \text{ は } n \text{ の約数}} m_x\right)\frac{T^n}{n}
\end{aligned}$$

と書ける．よって，

$$\sum_{x\in|X|,\ m_x \text{ は } n \text{ の約数}} m_x = \#X(\mathbb{F}_{q^n})$$

[29] もちろん，Riemann 予想の類似を "期待" することもできるが，Riemann 予想は $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ の場合でさえ証明されていないから，一般的な「予想」を述べるのは性急すぎるかもしれない．

[30] Hasse-Weil ゼータ関数と Galois 表現の L 関数の関係については §3.10 を参照．また，[Se6], [Tay3], [Tay1], [Tay2] を参照．

を示せばよい．これは，各閉点 $x \in |X|$ に対し，($\mathbb{F}_q$ 上共役な m_x 個の）$\mathbb{F}_{q^{m_x}}$-有理点の組 $P_{x,1}, \dots, P_{x,m_x}$ が定まり，これにより一対一対応

$$|X| \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{X(\overline{\mathbb{F}}_q) \text{ の } \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)\text{-軌道}\right\}$$
$$x \longleftrightarrow \{P_{x,1}, \dots, P_{x,m_x}\}$$

が得られることの帰結である．(閉点 $x \in |X|$ は，各 $X(\mathbb{F}_{q^n})$（n は m_x の倍数）に m_x 個ずつ寄与する.） □

定義 3.3. 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の代数多様体 X に対し，変数 T に関する形式的ベキ級数

$$Z(T, X) := \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \#X(\mathbb{F}_{q^m})\frac{T^m}{m}\right)$$

を X の**合同ゼータ関数**という．(X の合同ゼータ関数と Hasse-Weil ゼータ関数の間には $\zeta(s, X) = Z(q^{-s}, X)$ の関係がある.）

Weil は，有限体上の Fermat 型の超曲面の有理点の個数を数えることで，合同ゼータ関数を計算し，次の予想に導かれた（[We]）．

予想 3.4 (Weil 予想)**.** 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の代数多様体 X の合同ゼータ関数 $Z(T, X)$ は次をみたす.

(1) (**有理性**) $Z(T, X)$ は T に関する有理関数である．すなわち，T に関する 0 でない多項式の比で表される．

(2) (**関数等式**) X が $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな射影的代数多様体とすると，$Z(T, X)$ は

$$Z\left(\frac{1}{q^n T}, X\right) = \pm q^{n\chi/2} \cdot T^{\chi} \cdot Z(T, X)$$

をみたす．ここで n は X の次元である．χ は X の **Euler 数**であり，対角集合 $\Delta \subset X \times X$ の自己交点数で定義される：$\chi := \Delta \cdot \Delta$.（Euler 数については §3.6 を参照.）

(3) (**Riemann 予想の類似**) $Z(T, X)$ は

$$Z(T, X) = \frac{P_1(T) \cdot P_3(T) \cdots P_{2n-1}(T)}{P_0(T) \cdot P_2(T) \cdot P_4(T) \cdots P_{2n}(T)},$$
$$P_i(T) = \prod_j (1 - \alpha_{i,j} T), \qquad |\alpha_{i,j}| = q^{i/2}$$

という形に書ける．(「$|\alpha_{i,j}| = q^{i/2}$」の正確な意味は次の通り：$\alpha_{i,j}$ は代数的数で，そのすべての共役の複素絶対値が $q^{i/2}$ に等しい.）

(4) (**Betti 数の一致**) X が代数体 K 上の滑らかな射影的代数多様体 Y の標数 p 還元で得られると仮定する.（すなわち，Y の定義方程式の係数を $\bmod m_v$（v は p の上にある K の有限素点，$m_v \subset O_K$ は対応する O_K の極大イデアル）したものが X の定義方程式であるとする.）任意の体の埋め込み $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対し，$Y(\mathbb{C})$ は複素多様体であるから，その特異コホモロジー $H^i(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ が定義される．その次元 (Betti 数) は多項式 $P_i(T)$ の次数に等しい：

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^i\big(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q}\big) = \deg P_i(T)$$

(1) から，特に，$\zeta(s, X) = Z(q^{-s}, X)$ が s に関する有理型関数として $\mathbb{C}$ 全体に解析接続されることが分かる．(2) を Hasse-Weil ゼータ関数の言葉に翻訳すると，$T = q^{-s}$ であるから，$s \leftrightarrow n - s$ という形の関数等式が得られる．また，複素数 q に対し，$|q^{-s}| = q^{-\mathrm{Re}(s)}$ であるから，(3) は Hasse-Weil ゼータ関数の極や零点の実部に関する主張である．

楕円曲線の場合の予想 3.4 は Hasse によって 1930 年代には知られていた（例 3.6）.（Hasse は 1933 年と 1934 年に 2 通り[31]の証明を与えている.）Weil は 1940 年代に代数曲線の場合や（2 通り[32]の証明を与えている），アーベル多様体の場合を解決した．最終的に，Artin, Grothendieck らによるエタールコホモロジーの基礎付けを経て，予想 3.4 は Deligne によって解決された（[De2], [De3]）.（Deligne もまた 2 通り[33]の証明を与えている！）

例 3.5. X を n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ とする．このとき，

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_{q^m}) = q^{mn} + q^{m(n-1)} + \cdots + q^m + 1 = \sum_{k=0}^{n} q^{km}$$

であるから，

$$Z(T, X) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} q^{km}\frac{T^m}{m}\right) = \prod_{k=0}^{n} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(q^kT)^m}{m}\right) = \prod_{k=0}^{n}\frac{1}{1-q^kT}$$

となる．$\mathbb{P}^n$ の Euler 数は $\chi = n + 1$ であり，射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の Betti 数は

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = \begin{cases} 1 & i = 0, 2, 4, \ldots, 2n \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

[31] 標数 0 の体上に持ち上げて虚数乗法論を用いる証明と，標数 p の体上の Frobenius 射を用いる証明である.

[32] Jacobi 多様体を用いて代数曲線の場合をアーベル多様体の場合に帰着する方法と，代数曲線のベキ $C \times C$ 上の Hodge 指数定理を用いる方法である．これらは Grothendieck による「スタンダード予想」の動機付けとなった.

[33] [De2], [De3] の証明のアイデアは若干異なるが，使われている道具（エタールコホモロジー，Lefschetz ペンシル，関数体上の L 関数の収束性など）には共通のものが多い.（Hasse や Weil に比べると）“2 通りの別証明” とまでは言えないかもしれない.

であるから，$P_{2k}(T) = 1 - q^k T$ $(k = 0, \ldots, n)$，$P_{2k+1}(T) = 1$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ とおけば，予想 3.4 が確かめられる[34].

例 3.6 (Hasse の定理)**.** E を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の楕円曲線とする．$\mathbb{F}_q$ の標数が 2 でも 3 でもなければ，E は射影空間 $\mathbb{P}^2$ の中で 3 次式 (**Weierstrass 標準形**)

$$E\colon Y^2 Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3 \qquad (a, b \in \mathbb{F}_q,\ 4a^3 + 27b^2 \neq 0)$$

で定義される滑らかな射影的代数曲線である．このとき，代数的数 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が存在して，$\alpha\beta = q$ かつ，任意の $m \geq 1$ に対して

$$\#E(\mathbb{F}_{q^m}) = 1 - (\alpha^m + \beta^m) + q^m$$

をみたす.（これは **Lefschetz 跡公式**を用いて解釈できる．例 3.9 を参照.）これより，E の合同ゼータ関数は

$$Z(T, E) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \bigl(1 - (\alpha^m + \beta^m) + q^m\bigr) \frac{T^m}{m} \right) = \frac{(1 - \alpha T)(1 - \beta T)}{(1 - T)(1 - qT)}$$

と書ける．$\mathbb{C}$ 上の楕円曲線は「1 人乗りの浮き輪」であるから，その Betti 数を考慮すると，予想 3.4 (1), (3) から，$P_1(T) = (1 - \alpha T)(1 - \beta T)$ となるはずである．したがって，予想 3.4 (3) (Riemann 予想の類似) は

$$\begin{aligned} |\alpha| = |\beta| = q^{1/2} &\iff P(T) = 0 \text{ が重解か，または 2 個の異なる虚数解を持つ.} \\ &\iff (\alpha + \beta)^2 \leq 4q \end{aligned}$$

となるが，$\alpha + \beta = 1 + q - \#E(\mathbb{F}_q)$ に注意すると，不等式

$$\bigl|1 + q - \#E(\mathbb{F}_q)\bigr| \leq 2\sqrt{q} \qquad (\textbf{Hasse の不等式})$$

と同値であることが分かる．このように，楕円曲線に対する Weil 予想は，

『$\#E(\mathbb{F}_q)$ はほぼ $q+1$ であり，その “誤差項” がとても小さい』

という整数論的な意味を持つ[35]

[34]厳密に言うと，予想 3.4 (4) は $\mathbb{F}_q$ 上の射影空間 $\mathbb{P}^n$ の標数 0 への「すべての」持ち上げに対する主張であるから，特定の持ち上げ（すなわち $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 自身）に対して等号を確かめただけでは，予想 3.4 (4) を証明したことにはならない.

[35]例えば，素数 $p = 1{,}000{,}003$ に対し，$\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線 $E\colon Y^2 Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$ を考える．$\mathbb{P}^2$ 上の $\mathbb{F}_p$-有理点は $p^2 + p + 1 = 1{,}000{,}007{,}000{,}013$ 個もあるが，そのうち E を定義する 3 次方程式をみたすものが，$998{,}004$ 個以上 $1{,}002{,}004$ 個以下であることが分かる．Hasse の定理をうまく用いることで，有限体上の楕円曲線の有理点の個数を効率よく計算することができる.

3.3. **Weil 予想への位相幾何学的アプローチ.** Weil は，当時発達していた位相幾何学からのアイデアを取り入れることで，Weil 予想（予想 3.4）に取り組んだ．Weil による大胆なアイデアを一言で言えば，

『Frobenius 射に対して Lefschetz 跡公式を用いる』

というものであった．([Kl2]，8 ページの footnote を参照.)

これについて説明しよう．X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的代数多様体とする．X は十分次元の大きい射影空間に含まれ（$X \subset \mathbb{P}^m$ とする），いくつかの $\mathbb{F}_q$-係数の多項式の共通零点として表される．

$$X = \left\{[x_0 : \cdots : x_m] \in \mathbb{P}^m \;\middle|\; F_1(x_0, \ldots, x_m) = \cdots = F_r(x_0, \ldots, x_m) = 0\right\}$$

($[x_0 : \cdots : x_m]$ は $\mathbb{P}^m$ の斉次座標．$F_1, \ldots, F_r$ は $(m+1)$ 変数で $\mathbb{F}_q$ に係数を持つ斉次多項式.）斉次座標を q 乗する写像

$$[x_0 : \cdots : x_m] \mapsto [x_0^q : \cdots : x_m^q]$$

は X を自分自身にうつすから，これを $F\colon X \to X$ で表し，X の **Frobenius 射**と呼ぶ．一方で，有限体の Galois 理論により $\mathbb{F}_q = \{a \in \overline{\mathbb{F}}_q \mid a^q = a\}$ であるから，F の固定点の集合 $\mathrm{Fix}(F)$ は，X の $\mathbb{F}_q$-有理点の集合 $X(\mathbb{F}_q)$ に一致する[36]：

$$\mathrm{Fix}(F) := \{x \in X \mid F(x) = x\} = X(\mathbb{F}_q).$$

同様に，$\mathrm{Fix}(F^m) = X(\mathbb{F}_{q^m})$ である．予想 3.4 のためには，X の $\mathbb{F}_{q^m}$-有理点の個数 $\#X(\mathbb{F}_{q^m})$ をうまくコントロールする必要があるが，そのためには Frobenius 射のベキの固定点集合の位数 $\#\mathrm{Fix}(F^m)$ がコントロールできればよい.

位相幾何学における **Lefschetz 跡公式**を思い出そう．これは，大雑把に言えば，M をコンパクト位相多様体，$\varphi\colon M \to M$ を連続写像とし，φ の固定点集合を $\mathrm{Fix}(\varphi) := \{x \in M \mid \varphi(x) = x\}$ とおくと，

$$\#\mathrm{Fix}(\varphi) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(\varphi^*; H^i(M)\bigr)$$

がなりたつという定理である[37]．ここで $H^i(M)$ は M の（特異）コホモロジーであり，$\varphi^*\colon H^i(M) \to H^i(M)$ は φ から誘導される線形写像である.

[36] ここで重要なことは，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ の位相的生成元（q 乗写像）の $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ への作用が，$F\colon X \to X$ という代数多様体の間の射（Frobenius 射）に “化ける” ことである．このようなことは有限体以外の基礎体では期待できない.

[37] これはやや不正確である．正しい定理を述べるためには，$\mathrm{Fix}(\varphi)$ が孤立していることなどを仮定し（そうでないと「個数」に意味がない），左辺を「重複度を込めた和」に置き換えるなどの修正が必要である．また，M がコンパクトでなくても（あるいは位相多様体でなくても）なりたつ場合もある．詳しくは位相幾何学の教科書を参照.

X は有限体上の代数多様体であるから，もちろん，この定理を適用することはできない．ここで，大胆にも（！），

> 『Frobenius 射 $F\colon X \to X$ に対しても，何らかの意味で「Lefschetz 跡公式の類似」がなりたつ』

と “仮定” する．すなわち，X の「コホモロジー」と呼ばれる有限次元ベクトル空間 $H^i(X)$ が存在して，

$$\#\mathrm{Fix}(F^m) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}\bigl((F^*)^m; H^i(X)\bigr)$$

がなりたつとする．線形写像 $F^*\colon H^i(X) \to H^i(X)$ の固有値を $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,k_i}$ とおくと，$\#\mathrm{Fix}(F^m) = X(\mathbb{F}_{q^m})$ であるから，

$$X(\mathbb{F}_{q^m}) = \sum_i (-1)^i \sum_j \alpha_{i,j}^m$$

が分かり，X の合同ゼータ関数に関する公式

$$\begin{aligned} Z(T,X) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_i (-1)^i \sum_j \alpha_{i,j}^m \frac{T^m}{m}\right) = \prod_{i,j}\left(\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{i,j}T)^m}{m}\right)\right)^{(-1)^i} \\ &= \prod_{i,j}\left(\frac{1}{1-\alpha_{i,j}T}\right)^{(-1)^i} = \prod_{i,j}(1-\alpha_{i,j}T)^{(-1)^{i+1}} \end{aligned}$$

が得られる．こうして,「コホモロジー」の存在と，それに対して『Lefschetz 跡公式がなりたつ』という “仮定” から，合同ゼータ関数 $Z(T,X)$ が有理関数である (予想 3.4 (1)) という整数論的な命題が形式的に導かれてしまう．

それでは，ここで存在を “仮定” した，X の「コホモロジー」とは一体何なのだろうか？もちろん，X は位相多様体ではないから，位相幾何における定義をそのまま採用するわけにはいかない[38]．Weil は代数曲線の Jacobi 多様体の Tate 加群を用いて,「代数曲線の H^1」にあたるものを考察し，曲線の場合やアーベル多様体の場合の予想 3.4 を証明した．その目的のために，Weil が代数幾何学の基礎付けを行ったことは有名である[39]．Grothendieck は [EGA] において「スキーム」を導入し，代数幾何学の徹底的な基礎付けを行った後，位相空間や層といった概念を抽象化し，スキームに対する（通常の Zariski 位相とは異なる）「エタール位相」の概念を導入し，それを用

[38] X は Zariski 位相を持つから，もちろんその位相に関するコホモロジーを定義することはでき，代数幾何学への応用上重要である（連接層のコホモロジー ([Har]))．しかし，これは X の「形」や整数論的性質を十分に表すものではなく，Weil 予想への応用上は不十分である．

[39] 歴史的には，$\mathbb{C}$ 上の代数曲線（Riemann 面）の Jacobi 多様体は位相的・複素解析的な方法で研究されていたが，Weil はそれらの理論を代数的に（有限体上で）展開する必要があった．

いてコホモロジーを定義した ([SGA]). これが次に述べるエタールコホモロジーである. [EGA] の冒頭に壮大なプロジェクト開始当初に予定されていた「目次」を見ることができる[40]. Grothendieck による [EGA] の目標の一つは, Weil のアイデアをさらに発展させて, Weil 予想を「自然に証明する」ことであった.

3.4. **エタールコホモロジー（入門）.** ここでは, 整数論への応用を踏まえて, エタールコホモロジーがどういうもので, それがどう役に立つのか, ということに重点を置いて説明する. エタールコホモロジーの定義を説明したり, その基本的な性質を証明することは一切しない（できない）ので, 適宜文献を参照していただきたい.（文献については, §3.11 を参照.）

K と体とし, ℓ を K で可逆な素数とする. K 上の代数多様体 X に対し, i 次 ℓ 進**エタールコホモロジー**

$$H^i\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big)$$

が定まる[41]. これは $\mathbb{Q}_\ell$ 上の有限次元ベクトル空間であり, K の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ が連続に作用する. これにより K の ℓ 進表現

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow GL\big(H^i\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big)\big)$$

が得られる. 本稿の「はじめに」にも述べたように,

> 『エタールコホモロジーを用いることで, 代数多様体から Galois 表現（ℓ 進表現）を作ることができる』

という点は重要である.

各次数 i に対するエタールコホモロジーをまとめて,

$$H^*\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big) := \bigoplus_i H^i\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big)$$

と書く.

3.5. **エタールコホモロジーの基本的性質.** ここでは主に整数論への応用上重要な性質を説明することにし, 定理の主張の一般的な定式化は行わない. 次の性質はどれも

[40][EGA I] の 6 ページを見よ.

[41]ℓ が K の標数と等しい場合でもエタールコホモロジーは定義され, ガロア表現を得ることができる. しかし, エタールコホモロジーに対する重要な定理の中には, ℓ が K で可逆な場合にしかなりたたないものも多い. そこで, 本稿では「ℓ が K で可逆である」という仮定の下で説明することにする.（詳しくは [SGA] を参照.）

「自然」に見えるかもしれないが,（その見かけに反して）証明が極めて難しいものも数多く含まれている.

性質 1 (関手性): エタールコホモロジーは反変関手である．すなわち，K 上の代数多様体の間の射 $f : X \to Y$ に対し，**引き戻し**と呼ばれる線形写像

$$f^*\colon H^i\big(Y \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big) \longrightarrow H^i\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big)$$

が誘導される．f^* は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用と可換である．また，f が恒等射なら f^* は恒等写像で，$f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z$ に対して $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ がなりたつ.

性質 2 (有限性): $H^i\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big)$ は $\mathbb{Q}_\ell$ 上の有限次元ベクトル空間である．また，X の次元を n とおくと，$i < 0$ および $i > 2n$ では $H^i\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big) = 0$ である[42].

性質 3 (特異コホモロジーとの比較定理): $K = \mathbb{C}$ のとき，自然な同形

$$H^i\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big) \cong H^i\big(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}\big) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$$

が存在する．ここで右辺の $H^i\big(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}\big)$ は位相空間 $X(\mathbb{C})$ の特異コホモロジーである.

性質 4 (代数的閉体の変更に関する不変性): K' を $\overline{K}$ を含む代数的閉体とする（例えば K が代数体で，$K' = \mathbb{C}$）．このとき，自然な同形

$$H^i\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big) \cong H^i\big(X \otimes_K K', \mathbb{Q}_\ell\big)$$

が存在する.

性質 3，性質 4 をあわせると，次が導かれる：代数体 K 上の X と任意の体の埋め込み $\overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対し，エタールコホモロジー $H^i\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big)$ の $\mathbb{Q}_\ell$ 上の次元は，位相空間 $X(\mathbb{C})$ の Betti 数 $b_i(X(\mathbb{C}))$ に等しい[43].

X の次元を n とすると，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用と可換な自然な同形

$$H^0\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big) \cong \mathbb{Q}_\ell, \qquad H^{2n}\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big) \cong \mathbb{Q}_\ell(-n)$$

がある.（後者は**向き付け写像**と呼ばれている．$\mathbb{Q}_\ell(-n)$ は Tate 捻りである（例 2.8 を参照）.）また，任意の i, j に対し，**カップ積**と呼ばれる双線形写像

$$H^i\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big) \times H^j\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big) \longrightarrow H^{i+j}\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$$

---

[42] これは $K = \mathbb{C}$ の場合，$X(\mathbb{C})$ は $2n$ 次元の位相多様体になる（したがって，$i < 0$ および $i > 2n$ ではその i 次特異コホモロジーが消える）ことの対応物であると考えられる.

[43] Betti 数 $b_i(X(\mathbb{C}))$ が埋め込み $\overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ のとり方によらないことは自明ではない（[Se1]）．一般に，$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 X, X' が互いに共役（$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ の元でうつりあう）であっても，$X(\mathbb{C}), X'(\mathbb{C})$ は同相とは限らない（[Se2]）.

がある．カップ積は $\alpha\cdot\beta=(-1)^{ij}\beta\cdot\alpha$ をみたし，引き戻しと可換である．($f\colon X\to Y$ に対し，$f^*(\alpha\cdot\beta)=(f^*\alpha)\cdot(f^*\beta)$ がなりたつ.)

性質 5 (Poincaré 双対定理): X の次元を n とすると，カップ積と向き付け写像から定まる双線形形式

$$H^i\big(X\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)\times H^{2n-i}\big(X\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)(n)\longrightarrow\mathbb{Q}_\ell$$

は非退化である．

Poincaré 双対定理より，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用と可換な同形

$$H^{2n-i}\big(X\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)\cong\Big(H^i\big(X\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)\Big)^*(-n)$$

が得られる（$*$ は双対空間を表す）．また，X の次元を n，Y の次元を m としたとき，射 $f\colon X\to Y$ による引き戻し写像 f^*

$$f^*\colon H^{2n-i}\big(Y\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)\longrightarrow H^{2n-i}\big(X\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)$$

の双対写像

$$H^i\big(X\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)(n)\longrightarrow H^{2m-(2n-i)}\big(Y\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)(m)$$

の Tate 捻りで得られる写像を

$$f_*\colon H^i\big(X\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)\longrightarrow H^{i+2(m-n)}\big(Y\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)(m-n)$$

とおく．

性質 6 (Künneth 公式): X,Y に対し，直積からの射影をそれぞれ $p\colon X\times Y\to X$, $q\colon X\times Y\to Y$ とおく．このとき，$(\alpha,\beta)\mapsto(p^*\alpha)\cdot(q^*\beta)$ の和から導かれる写像

$$\Bigg(\bigoplus_{i+j=k}H^i\big(X\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)\otimes H^j\big(Y\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)\Bigg)\xrightarrow{\ \cong\ }H^k\big((X\times Y)\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)$$

は同形である．

引き続き，X の次元を n とおく．X の余次元 i の閉部分代数多様体の整数係数の形式和 $a_1Z_1+\cdots+a_rZ_r$ $(a_1,\dots,a_r\in\mathbb{Z},\ Z_1,\dots Z_r\subset X$ は余次元 $i)$ のことを余次元 i の**代数的サイクル**といい，その全体を $C^i(X)$ とおく．

性質 7 (サイクル写像): **サイクル写像**と呼ばれる写像

$$\gamma_X\colon C^i(X)\longrightarrow H^{2i}\big(X\otimes_K\overline{K},\,\mathbb{Q}_\ell\big)(i),\quad Z\mapsto\gamma_X(Z)$$

が存在し，次をみたす．

- $f\colon X \to Y$ に対し $f^* \circ \gamma_Y = \gamma_X \circ f^*$，$f_* \circ \gamma_X = \gamma_Y \circ f_*$．
- $Z \in C^i(X), W \in C^j(Y)$ に対し，$\gamma_{X\times Y}(Z \times W) = \gamma_X(Z) \otimes \gamma_Y(W)$．
- X が 1 点のときは，$C^0(X) = \mathbb{Z}$, $H^0\big(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big) = \mathbb{Q}_\ell$ である．$\gamma_X\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_\ell$ は 1 を 1 にうつす．

$\gamma_X(Z)$ を Z の定める**コホモロジー類**という．Z が余次元 i，W が余次元 $n-i$ であれば，$Z \cdot W = \gamma_X(Z) \cdot \gamma_Y(W)$ がなりたつことが証明できる（左辺は Z と W の**交点数**．右辺はコホモロジー類のカップ積に向き付け写像を合成したもの）．

Galois 表現への応用上は，次の性質が重要である．

性質 8 (標数 p 還元における不変性): X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな射影的代数多様体とし，代数体上の滑らかな射影的代数多様体 Y の標数 p 還元として得られると仮定する．すなわち，Y の定義方程式の係数を $\mathrm{mod}\ m_v$（v は p の上にある K の有限素点，$m_v \subset O_K$ は対応する O_K の極大イデアル）したものが X の定義方程式であるとする．K の v における完備化を K_v とおく．ℓ を q と互いに素な素数とし，体の埋め込み $\overline{K} \hookrightarrow \overline{K}_v$ を固定する．このとき，$\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ の作用と可換な同形

$$H^i\big(Y \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big) \cong H^i\big(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell\big)$$

が存在する．

この同形から，特に，$\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ の左辺への作用は全射 $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ を経由するから，惰性群 I_v の作用は自明であり，$H^i\big(Y \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\big)$ から得られる K の ℓ 進表現が v で不分岐であることが分かる．また，一般に，Y を代数体 K 上の滑らかな射影的代数多様体とすると，Y のエタールコホモロジーから定まる ℓ 進表現が有限個を除くすべての v で不分岐[44]であることも分かる．

性質 9 (有限体上の Frobenius 射): X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の代数多様体とし，$\mathrm{Frob}_q \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ を**幾何的 Frobenius 元**（q 乗写像の逆写像）とする．また，$F\colon X \to X$ を **Frobenius 射**とする．このとき，Frob_q と F が $H^i\big(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell\big)$ に誘導する写像は等しい．

これが Frob_q を "幾何的" Frobenius 元と呼んだ理由である．

[44] Y の定義方程式の係数を $\mathrm{mod}\ m_v$ したものが剰余体 $\kappa(v)$ 上の滑らかな代数多様体を定め（このような v において Y は**良い還元**を持つという），さらに剰余体 $\kappa(v)$ において ℓ が可逆であるとき，Y のエタールコホモロジーから定まる ℓ 進表現は v において不分岐である．

3.6. **Lefschetz 跡公式.** 上に述べた性質を用いることで，エタールコホモロジーに対するLefschetz 跡公式が示される.

命題 3.7 (Lefschetz 跡公式)**.** X を体 K 上の滑らかな射影的代数多様体とし，その次元を n とおく．射 $\varphi\colon X \to X$ の固定点集合を $\mathrm{Fix}(\varphi) := \bigl\{x \in X \mid \varphi(x) = x\bigr\}$ とおく．このとき，

$$\text{“}\#\mathrm{Fix}(\varphi)\text{”} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(\varphi^*; H^i\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr)\bigr)$$

がなりたつ.

証明を述べる前に，左辺の “$\#\mathrm{Fix}(\varphi)$” について説明する．写像 $X \to X \times X$, $x \mapsto (\varphi(x), x)$ の像を Γ_φ とおき，$\varphi\colon X \to X$ の**グラフ**という．また，対角写像 $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ の像を Δ とおく．このとき，

$$\text{“}\#\mathrm{Fix}(\varphi)\text{”} := \Gamma_\varphi \cdot \Delta$$

と定義する．ここで，右辺の $\Gamma_\varphi \cdot \Delta$ は 2 つの部分代数多様体 $\Gamma_\varphi, \Delta \subset X \times X$ の**交点数**であり，もし Γ_φ と Δ が**横断的に交わっていれば**，共通部分 $\Gamma_\varphi \cap \Delta = \mathrm{Fix}(\varphi)$ の位数と等しく,「φ の固定点の個数」を数えていることになる.

命題 3.7 は Γ_φ と Δ が横断的に交わっていなくてもなりたつ．例えば，φ として恒等写像 $\mathrm{id}\colon X \to X$ をとると，Δ の**自己交点数**に関する公式

$$\Delta \cdot \Delta = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr)$$

が得られる[45]．X が種数 g の滑らかな射影的代数曲線であれば，その H^1 の次元は（標数によらず）$2g$ に等しく，

$$\Delta \cdot \Delta = 2 - 2g$$

となる．これが，予想 3.4 (2) において，$\Delta \cdot \Delta$ を **Euler 数**と呼んだ理由である.

$\alpha \in H^{2n}\bigl((X \times X) \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr)(n)$ に対して，$X \times X$ の二つの成分を入れ替えたものを ${}^t\alpha$ とおき，α の**転置**という．また α は写像（この写像も再び α で表す）

$$H^i\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr) \longrightarrow H^i\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr), \qquad x \mapsto p_{2*}\bigl((p_1^* x) \cdot \alpha\bigr)$$

を引き起こす.（ここで，$p_1, p_2\colon X \times X \to X$ はそれぞれ第一，第二成分への射影である.

$$p_{2*}\colon H^{i+2n}\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr)(n) \longrightarrow H^i\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr)$$

[45]特に，右辺は ℓ の選び方によらないことが分かる.

に注意.）Δ のコホモロジー類 $\gamma_{X\times X}(\Delta)$ は恒等写像を誘導し，φ のグラフ Γ_φ のコホモロジー類 $\gamma_{X\times X}(\Gamma_\varphi)$ の誘導する写像は φ^* に等しい．また，その転置 ${}^t\gamma_{X\times X}(\Gamma_\varphi)$ は φ_* を誘導する．

したがって，命題3.7を示すためには，より一般的な次の命題を示せば十分である．($\alpha=\gamma_{X\times X}(\Gamma_\varphi)$，$\beta=\gamma_{X\times X}(\Delta)$ とおけばよい)

命題 3.8 (Lefschetz 跡公式の一般化)**.** $\alpha,\beta\in H^{2n}\big((X\times X)\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}_\ell\big)(n)$ に対し，α,β が誘導する写像の合成を

$$\beta\circ\alpha\colon H^i\big(X\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}_\ell\big)\longrightarrow H^i\big(X\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}_\ell\big)$$

とおく．この写像の跡の交代和が次のようにして計算できる：

$$\alpha\cdot{}^t\beta=\sum_i(-1)^i\operatorname{Tr}\big(\beta\circ\alpha;H^i\big(X\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}_\ell\big)\big)$$

(左辺は α と ${}^t\beta$ のカップ積で，向き付け写像 $\alpha\cdot{}^t\beta\in H^{4n}\big((X\times X)\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}_\ell\big)(2n)\cong\mathbb{Q}_\ell$ によって $\mathbb{Q}_\ell$ の元とみなす.)

証明.（[Kl], Proposition 1.3.6 を参照）．Künneth 公式より

$$H^{2n}\big((X\times X)\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}_\ell\big)(n)\cong\bigoplus_i H^i\big(X\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}_\ell\big)(n)\otimes H^{2n-i}\big(X\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}_\ell\big)$$

であり，定理の両辺は α,β に関して双線形なので，$\alpha=\alpha_j\otimes\alpha'_{2n-j}$，$\beta=\beta_k\otimes\beta'_{2n-k}$ と仮定してよい（添え字はコホモロジーの次数を表す）．$x\in H^i\big(X\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}_\ell\big)$ の行き先は

$$\big(\beta\circ\alpha\big)(x)=q_*\big(x\cdot\alpha_j\big)\cdot q_*\big(\alpha'_{2n-j}\cdot\beta_k\big)\cdot\beta'_{2n-k}$$

である．X から一点 P への射影を $q\colon X\to P$ とおいた．q_* の像は $H^*\big(P\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}_\ell\big)\cong\mathbb{Q}_\ell$ の元（スカラー）である．

$j\neq k$ なら $q_*\big(\alpha'_{2n-j}\cdot\beta_k\big)=0$ なので，右辺は $\beta\circ\alpha=0$ となる．また，左辺については，${}^t\beta=\beta'_{2n-k}\otimes\beta_k$ だから，$\alpha\cdot{}^t\beta=(\alpha_j\cdot\beta'_{2n-k})\otimes(\alpha'_{2n-j}\cdot\beta_k)=0$ となる（$j\neq k$ なら，$2n+(j-k)>2n$ または $2n+(k-j)>2n$ である）．したがって，$0=0$ となって，命題3.8の等式はなりたつ．

$j=k$ のときは，命題3.8の等式の右辺の交代和において，$i=2n-j$ の項のみが残る．$\beta\circ\alpha$ の像は β'_{2n-j} の定数倍に等しいから，右辺は

$$\begin{aligned}(-1)^{2n-j}\big(q_*\big(\beta'_{2n-j}\cdot\alpha_j\big)\cdot q_*\big(\alpha'_{2n-j}\cdot\beta_j\big)\big)&=\big(q_*\big(\alpha_j\cdot\beta'_{2n-j}\big)\cdot q_*\big(\alpha'_{2n-j}\cdot\beta_j\big)\big)\\&=(q\times q)_*\big(\alpha\cdot{}^t\beta\big)\end{aligned}$$

となり，命題3.8の等式が得られる． □

X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな射影的代数多様体とし，その次元を n とおく．$m \geq 1$ とおく．Frobenius 射のベキ $F^m \colon X \to X$ が接空間に零写像を誘導することから[46]，$X \times X$ の部分代数多様体として，Frobenius 射のグラフ Γ_F と対角集合 Δ が横断的に交わることが分かる．そして，Lefschetz 跡公式（命題 3.7）から

$$\#X(\mathbb{F}_{q^m}) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr}\bigl((F^*)^m; H^i\bigl(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell\bigr)\bigr)$$

が分かる．(§3.4 の性質 9 より，右辺の F^* を Frob_q の作用に置き換えても同様.）このようにして，エタールコホモロジーの理論により，§3.3 で “仮定” として述べた

『Frobenius 射に対する Lefschetz 跡公式』

が実現される．

例 3.9. E を体 K 上の楕円曲線とする．例 2.9 において，$\mathbb{Q}_\ell$ 上の 2 次元ベクトル空間

$$V = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}\bigl((\varprojlim E[\ell^n]) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell, \mathbb{Q}_\ell\bigr)$$

への $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用から，K の 2 次元 ℓ 進表現 $\rho_{E,\ell}$ が得られることを述べた（ℓ は K で可逆な素数）．V は E の 1 次エタールコホモロジーと同形である：

$$V = H^1\bigl(E \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr)$$

さらに，もし K が有限体 $\mathbb{F}_q$ であれば，Frobenius 射 F は $H^0\bigl(E \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr) \cong \mathbb{Q}_\ell$ に自明に作用し，$H^2\bigl(E \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr) \cong \mathbb{Q}_\ell(-1)$ に q 倍で作用する．したがって，Lefschetz 跡公式から

$$\#E(\mathbb{F}_q) = 1 - \operatorname{Tr}\bigl(F^*; V\bigr) + q$$

が得られる．そして，§3.5, 性質 9 を使うと，

$$\operatorname{Tr}\bigl(\rho_{E,\ell}(\mathrm{Frob}_q)\bigr) = 1 + q - \#E(\mathbb{F}_q)$$

が得られる．

3.7. **Weil 予想 (エタールコホモロジーを用いた定式化).** Weil 予想 (予想 3.4) に戻ろう．

エタールコホモロジーと Lefschetz 跡公式（§3.6, 命題 3.7）を用いることで，§3.3 と同様の議論により，X の合同ゼータ関数 $Z(X,T)$ に関する性質を示すことができる．その結果をまとめておこう．X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな射影的代数多様体とし，

[46]これは，$\mathbb{F}_q$ 上では $q = 0$ なので，$f(x) = x^q$ の微分が $f'(x) = 0$ となることの帰結である．

その次元を n とおく．Frobenius 射 F のエタールコホモロジー $H^i\big(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}}_q,\,\mathbb{Q}_\ell\big)$ への作用の固有値を $\alpha_{i,1},\dots,\alpha_{i,k_i}$ とおくと，Lefschetz 跡公式（§3.6, 命題 3.7）より

$$\#X(\mathbb{F}_{q^m})=\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\left(\alpha_{i,1}^m+\cdots+\alpha_{i,k_i}^m\right)$$

がなりたつ．また，

$$P_i(T):=\det\left(1-TF^*;H^i\big(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}}_q,\,\mathbb{Q}_\ell\big)\right)=\prod_{j=1}^{k_i}(1-\alpha_{i,j}T)$$

とおくと，X の合同ゼータ関数は

$$Z(T,X)=\prod_{i=0}^{2n}\big(P_i(T)\big)^{(-1)^{i+1}}=\frac{P_1(T)\cdot P_3(T)\cdots P_{2n-1}(T)}{P_0(T)\cdot P_2(T)\cdot P_4(T)\cdots P_{2n}(T)}$$

をみたす．特に，$Z(T,X)$ が有理関数であること（予想 3.4（1））が分かる．$Z(T,X)$ の関数等式（予想 3.4（2））は，Poincaré 双対定理（§3.4，性質 5）から次のようにして導かれる．同形

$$H^{2n-i}\big(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}}_q,\,\mathbb{Q}_\ell\big)\cong\Big(H^i\big(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}}_q,\,\mathbb{Q}_\ell\big)\Big)^*(-n)$$

から，固有値の集合 $\{\alpha_{2n-i,1},\dots,\alpha_{2n-i,k_{2n-i}}\}$ と固有値の集合 $\{q^n\alpha_{i,1}^{-1},\dots,q^n\alpha_{i,k_i}^{-1}\}$ は（重複度を込めて）等しい．特に $k_i=k_{2n-i}$ であり，

$$\left(\prod_{j=1}^{k_i}\alpha_{i,j}\right)\left(\prod_{j=1}^{k_{2n-i}}\alpha_{2n-i,j}\right)=q^{nk_i}$$

となる．また，

$$P_i\left(\frac{1}{q^nT}\right)=\prod_{j=1}^{k_i}\left(1-\frac{\alpha_{i,j}}{q^nT}\right)=(-1)^{k_i}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{k_i}\alpha_{i,j}}{(q^nT)^{k_i}}\cdot P_{2n-i}(T)$$

が分かる．Euler 数が $\chi=k_0-k_1+\cdots+k_{2n}$ となることに注意して，

$$Z\left(\frac{1}{q^nT},\,X\right)=\pm q^{n\chi/2}\cdot T^\chi\cdot Z(T,X)$$

が得られる．また，Betti 数の一致（予想 3.4（4））は §3.4 の性質 3，性質 4，性質 8 の帰結である．

こうして，Weil 予想は，最も難しい Riemann 予想の類似（予想 3.4（3））を除いて，エタールコホモロジーを用いて自然に証明される．残された予想 3.4（3）は，エタールコホモロジーへの Frob_q の作用の固有値に関する次の定理に帰着される．

定理 3.10 ([De2], [De3])**.** X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな射影的代数多様体とし，Frobenius 射 F のエタールコホモロジー $H^i\big(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}}_q,\,\mathbb{Q}_\ell\big)$ への作用の固有値を $\alpha_{i,1},\dots,\alpha_{i,k_i}$

とおくと，任意の j $(1 \leq j \leq k_i)$ に対し，$\alpha_{i,j}$ は代数的数で，そのすべての共役の複素絶対値は $q^{i/2}$ に等しい．

Deligne は定理 3.10 に対し，2 通りの（少しだけ異なる）証明を与えた．(今日では [De2] は "Weil I", [De3] は "Weil II" と呼ばれている．) 特に "Weil II" において，Weil 予想はエタール ℓ 進層に一般化された形で証明されており，その結果はその後の数論幾何の発展の基礎となった[47].

Deligne による定理 3.10 の証明は，Grothendieck が当初期待していたもの（これについては次節で説明する）とは異なるものであった．残念ながらここでは Deligne の証明を紹介することはできないが，その証明は，関数体上の L 関数の収束性に関する解析数論の技法に，Lefschetz ペンシルのモノドロミーという位相幾何学的なアイデアを組み合わせた驚くべきものであるということを述べておこう．

3.8. **Weil 予想の応用．** Weil 予想（および Deligne の定理（定理 3.10））は，それ自身重要であるのみならず，多くの応用を持つ．そのうちのいくつかを挙げよう．

K を体とし，X を K 上の滑らかな射影的代数多様体とする．ℓ を K で可逆な素数とする．X の **ℓ 進 Betti 数**をエタールコホモロジーの次元

$$b_{\ell,i}(X) := H^i\big(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q,\, \mathbb{Q}_\ell\big)$$

で定義する．これが ℓ によらないことはエタールコホモロジーに関する基本的な問題である．§3.6 で $b_{\ell,i}(X)$ の交代和（Euler 数）が ℓ によらないことを述べたが，実は，定理 3.10 を用いることで，各 $b_{\ell,i}(X)$ が ℓ によらないことを証明することができる．(本稿では説明していないが）特殊化の議論により，標数が ℓ と異なる有限体の場合に帰着できる[48]．$K = \mathbb{F}_q$ とおく．X の合同ゼータ関数は

$$Z(T,X) = \prod_{i=0}^{2n} \big(P_i(T)\big)^{(-1)^{i+1}} = \frac{P_1(T)\cdot P_3(T)\cdots P_{2n-1}(T)}{P_0(T)\cdot P_2(T)\cdot P_4(T)\cdots P_{2n}(T)}$$

と書ける．関数 $Z(T,X)$ は ℓ によらずに（ベキ級数として）定義され，T の関数として複素平面全体に一意的に解析接続される[49]ことに注意しよう．定理 3.10 を用いると，関数 $Z(T,X)$ の極また零点のうち，その絶対値が $q^{-i/2}$ に等しいものの個数を重複度を込めて数えたものが $\deg P_i(T) = b_{\ell,i}(X)$ に等しいことが分かる．こうして，$b_{\ell,i}(X)$

---

[47] その後，Laumon, Katz による "ℓ 進 Fourier 変換" を用いた別証明も得られている ([La], [Katz])．また，Kedlaya による "p 進版 Weil II" もある ([Ked])．

[48] K の標数が 0 の場合は，$\mathbb{C}$ に帰着する証明も可能である．$K = \mathbb{C}$ の場合，ℓ 進 Betti 数は $X(\mathbb{C})$ の（位相空間としての）Betti 数に等しいから，特に ℓ によらない．

[49] T に関する有理関数なので，これは当たり前である．

が ℓ によらないことが証明される[50]．同様の議論で，Weil 予想を標数 0 の代数多様体の Betti 数の計算に応用することもできる．すなわち，標数 0 の体上の滑らかな射影的代数多様体 X に対し，その $\bmod p$ 還元の有理点の個数を計算し，合同ゼータ関数を求めることで，$X(\mathbb{C})$ の Betti 数を計算するのである．例えば，トーリック多様体の場合の Betti 数の計算が [Fu] にある．これ以外にも，ある種のベクトルバンドルのモジュライ空間や（[HN]），Calabi-Yau 多様体の Betti 数の計算に応用することもできる ([Ba])[51].

§2.2, §2.9 でも述べたが，Weil 予想の著しい応用として，Ramanujan 予想の解決が挙げられる．これは，無限積の展開係数

$$\Delta = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$$

で定義される Ramanujan の τ 関数が，任意の素数 p に対し

$$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$$

をみたすというものであり，久賀 - 佐藤多様体と呼ばれる 11 次元代数多様体 X の標数 p 還元の合同ゼータ関数が

$$1-\tau(p)T+p^{11}T^2$$

という因子を持つことを示すことによって証明される．もう少し正確にいうと，X の 11 次エタールコホモロジー $H^{11}\big(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}}_q,\,\mathbb{Q}_\ell\big)$ には Ramanujan の Δ 関数に対応する 2 次元ベクトル空間[52]が含まれており，そこでの幾何的 Frobenius 元 Frob_p の固有多項式 α_p, β_p が

$$(1-\alpha_pT)(1-\beta_pT) = 1-\tau(p)T+p^{11}T^2$$

をみたすのである．定理 3.10 により $|\alpha_p| = |\beta_p| = p^{11/2}$ であるから，

$$|\tau(p)| = |\alpha_p+\beta_p| \leq 2p^{11/2}$$

となって，Ramanujan 予想が導かれる（[De1], [De2]）.

これ以外にも，代数曲線や超平面の $\mathbb{F}_q$-有理点の個数の良い評価（楕円曲線の場合の Hasse の定理（例 3.6）の一般化）や，三角和の評価，関数体上の佐藤-Tate 予想への応用もある. ([De2], [De3], [La] を参照．関数体上の佐藤-Tate 予想については，[Yo] も参照.)

[50]一般の代数多様体 X（滑らかでない，あるいは射影的でない）に対しても ℓ 進 Betti 数は定義できるが，一般には，それが ℓ によらないことは未解決である．これ以外にも，エタールコホモロジーに関しては，様々な未解決問題がある．Illusie による最近の論説 [Il] を参照.

[51]手前味噌だが，Hodge 数の計算への応用については [It1],[It2] もある.

[52]§2.9 の言葉を使うと,『Δ に伴う ℓ 進表現が X の 11 次エタールコホモロジーに現れる』となる.

3.9. **強 Lefschetz 定理.** Deligne は “Weil II” において次の定理を証明した[53].

定理 3.11 (強 Lefschetz 定理（[De3]）). *K を体とし，ℓ を K で可逆な素数とする．X を K 上の滑らかな射影的代数多様体とする．X の次元を n とおく．X は射影的なので,（十分大きな次元の）射影空間に含まれる : $X \subset \mathbb{P}^m$．$H \subset \mathbb{P}^m$ を超平面とし，超平面切断 $H \cap X$ は滑らかであると仮定する．$\gamma_X(H \cap X) \in H^2\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr)(1)$ とカップ積をとる写像を*

$$L\colon H^i\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr) \longrightarrow H^{i+2}\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr)(1), \qquad x \mapsto x \cdot \gamma_X(H \cap X)$$

とおく（L を **Lefschetz 作用素***という）．任意の $i \geq 1$ に対し，L を i 回繰り返して得られる次の写像は同形である :*

$$L^i\colon H^{n-i}\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr) \longrightarrow H^{n+i}\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr)(i)$$

強 Lefschetz 定理と関係した定理として，**弱 Lefschetz 定理**がある．これは，包含写像を $h\colon H \cap X \hookrightarrow X$ とおくと，引き戻し写像

$$h^*\colon H^i\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr) \longrightarrow H^i\bigl((H \cap X) \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr)$$

は $i \leq n-2$ で同形であり，$i = n-1$ で単射であるという定理であり，強 Lefschetz 定理よりもずっとやさしい（“Weil II” よりも前に，[SGA] ですでに証明されている）．強 Lefschetz 定理から弱 Lefschetz 定理（の一部）が次のようにして導かれる（もちろんこれは論理的には正しい順序ではないが） : サイクル写像の基本的性質により，

$$h_* \circ h^*\colon H^i\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr) \longrightarrow H^{i+2}\bigl(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell\bigr)(1)$$

は Lefschetz 作用素 L と等しいことが示される．したがって，もし定理 3.11 の L^i が同形なら，H^{n-i} 上で h^* は単射である[54].

3.10. **Hasse-Weil ゼータ関数と Galois 表現の L 関数.** Hasse-Weil ゼータ関数と Galois 表現の L 関数の関係についてまとめておこう.（Galois 表現の L 関数については定義 2.3 を参照．また，Hasse-Weil ゼータ関数については定義 3.1 を参照.）

[53] 定理 3.11 がなぜ Weil 予想（定理 3.10）と関係するのか不思議に思う読者も多いと思う．詳しくは原論文 [De3] を参照していただきたいが，その証明の方針をとても雑に述べると次の通り : 定理 3.11 はカップ積から定まるある双線形形式が非退化であることと同値である．Lefschetz ペンシルのモノドロミーを考えることで，あるエタール ℓ 進層が半単純であることに帰着される．これは，エタール ℓ 進層の圏が半単純であるという Deligne の定理から分かる（定理 3.10（の一般化）を用いて,（Ext^1 と関係する）ある種の H^1 への幾何的 Frobenius 元の作用が 1 を固有値に持たないことを示すのがポイント）．“Weil II” の偏屈層への一般化については [BBD] を参照.

[54] $i \leq n-2$ なら h^* が同形であることは，X, $H \cap X$, $U = X \backslash (H \cap X)$ のエタールコホモロジーを比較する長完全系列の存在と,（滑らかな）アフィン多様体 U の（コンパクト台付き）エタールコホモロジーが $i < n$ で消えることから分かる.

K を代数体とし，X を K 上の滑らかな射影的代数多様体とする．X の次元を n とおき，素数 ℓ を固定する．X の i 次 ℓ 進エタールコホモロジー $H^i\big(X\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}_\ell\big)$ から K の ℓ 進表現が得られる．これを $\rho^i_{X,\ell}$ とおく．次の交代積を考えよう．

$$\zeta_{X,\ell}(s):=\prod_{i=0}^{2n}L(s,\rho^i_{X,\ell})^{(-1)^i}$$

ここで，$\zeta_{X,\ell,v}(s)=\prod_{i=0}^{2n}L_v(s,\rho^i_{X,\ell})^{(-1)^i}$ とおくと，

$$\zeta_{X,\ell}(s)=\prod_{v\text{ は }K\text{ の有限素点}}\zeta_{X,\ell,v}(s)$$

と書ける．

$\mathrm{Spec}\,O_K$ 上有限型のスキームで $\mathfrak{X}\otimes_{O_K}K=X$ をみたすものをとる[55]．$\mathfrak{X}$ の Hasse-Weil ゼータ関数を $\zeta(s,\mathfrak{X})$ とおく．v における特殊ファイバー $\mathfrak{X}_v:=\mathfrak{X}\otimes_{O_K}(O_K/m_v)$ の Hasse-Weil ゼータ関数を $\zeta(s,\mathfrak{X}_v)$ とおくと，

$$\zeta(s,\mathfrak{X})=\prod_{v\text{ は }K\text{ の有限素点}}\zeta(s,\mathfrak{X}_v)$$

がなりたつ．

そして，有限個の v を除いて，等式

$$\zeta_{X,\ell,v}(s)=\zeta(s,\mathfrak{X}_v)$$

がなりたつ[56]．

まとめておこう．

> 『エタールコホモロジーを用いることで，代数体 K 上の代数多様体 X から ℓ 進表現 $\rho^i_{X,\ell}$ を作ることができる．ℓ 進表現の L 関数 $L(s,\rho^i_{X,\ell})$ の交代積 $\zeta_{X,\ell}(s)$ は，高々有限個の v に関する因子を除いて，X の O_K 上の整モデル $\mathfrak{X}$ の Hasse-Weil ゼータ関数 $\zeta(s,\mathfrak{X})$ に等しい.』

3.11. **エタールコホモロジーに関する文献について．** Weil 予想やエタールコホモロジーに関する文献は多い．日本語の教科書としては [Kato] の出版が予定されている．代数幾何学の標準的な教科書である [Har]（最近，和訳も出版された）には，付録に

[55] このような $\mathfrak{X}$ を X の O_K 上の**整モデル**という．整モデルは一意的ではないが常に存在する．X は有限個の K 係数の多項式で定義されるから，X の定義方程式の分母を適当に払うことで，O_K 係数の多項式で定義されていると仮定してよい．それらの多項式で定義された $\mathrm{Spec}\,O_K$ 上のスキームを $\mathfrak{X}$ とおけばよい．

[56] 整モデル $\mathfrak{X}$ を "うまく" 選べば，この等式が「すべての v でなりたつ」こともある．例えば，楕円曲線（やアーベル多様体）の場合は **Néron モデル**がそのような整モデルを与える．

Weil 予想とエタールコホモロジーに関する簡単な解説が書かれている．また，[Hot] には，代数曲線に対する Weil 予想の「初等的証明」（Bombieri による ([Bo])）が解説されている．これ以外にも，英語で書かれた教科書としては，[FK], [Mil] などがある．([FK] の冒頭には Dieudonné による歴史的解説があり，興味深い.）アーベル多様体に対する Weil 予想の証明が書かれた文献としては [Mum] がある．しかし，エタールコホモロジーの理論の構成や定理の証明がきちんと書かれた文献は，いまだに原典 [SGA]（Weil 予想については [De2], [De3]）しかないようである．[SGA] には他の文献では省略されている部分 — コホモロジー論の基礎となる部分 — が丁寧に（丁寧すぎる程）書かれており，その背後にある（理論の構築とはこうあるべきである，定義・定理・証明とはこうあるべきであるという）Grothendieck の思想が色濃く反映されている．すべてを読み通すのは不可能に近いが,（学生のうちに）苦労して読めば，苦労した分だけ得るものがあることは間違いないので，本稿をここまで読み進めることができた読者は（！），ぜひ [SGA], [De2], [De3] に挑戦していただきたい．

4. Grothendieck の夢 — スタンダード予想とモチーフの理論, Weil 予想，Jannsen の定理

エタールコホモロジーを用いることで，Riemann 予想の類似（予想 3.4（3））を除き，Weil 予想（予想 3.4）は見通しよく証明されることを述べた．では，残された Riemann 予想の類似（予想 3.4（3））を証明するためには，どうすればよいだろうか? Grothendieck の大胆なアイデアは，

> 『Weil 予想は良い性質をもつコホモロジー理論と，代数的サイクルに関する予想（スタンダード予想）から**自然に導かれる**だろう.』

というものであった.

Grothendieck は，存在が期待される良い性質をもつコホモロジー理論を **Weil コホモロジー**と呼び，その公理的な枠組みを与え，**スタンダード予想**と呼ばれる 2 つの予想（予想 4.3，予想 4.4）を提出した．これらの予想は，Weil による代数曲線やアーベル多様体の場合の証明や，Serre による Weil 予想の複素数体 $\mathbb{C}$ 上の類似の証明に触発されたものであった．そして，Weil コホモロジーの存在と 2 つのスタンダード予想を**仮定した上で**，Weil 予想が自然に証明されることを示した．さらに，代数多様体のコホモロジーをすべて支配するような理論— **モチーフの理論** — が存在することを示した.

本節では，Grothendieck による Weil 予想の証明のアイデアを紹介する．そして，Grothendieck が夢見た「モチーフの理論」について説明する.（詳しくは，[Groth], [Ma], [Kl], [Kl2], [Seattle] を参照[57].）

4.1. Weil コホモロジーの "公理"． 基礎体として代数的閉体 K を，係数体として標数 0 の体 L を固定する．L を係数体とした **Weil コホモロジー**とは，K 上の滑らかな射影的代数多様体 X に対して，L 上の次数付き代数 $H^*(X)$ を対応させる規則：

$$X \mapsto H^*(X) = \bigoplus_i H^i(X)$$

であって，$H^*(X)$ の積 (**カップ積**という) は $\alpha \in H^i(X)$, $\beta \in H^j(X)$ に対し $\alpha \cdot \beta = (-1)^{ij}\beta \cdot \alpha$ をみたす反変関手であり（$f\colon X \to Y$ に対し，次数を保つ L 代数準同形写像 $f^*\colon H^*(X) \to H^*(X)$ が定まる．f が恒等射なら f^* は恒等写像で，$f\colon X \to$

[57]Grothendieck Circle のホームページ `http://www.grothendieckcircle.org/` から，Grothendieck に関する様々な文献をダウンロードすることができる．未出版の原稿や，Grothendieck がモチーフについて述べた手紙を入手することもできる.

$Y,\ g\colon Y\to Z$ に対し $(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$ をみたす)，さらに以下の性質 1〜6 をみたすものをいう.

性質 1 (有限性): 各 $H^i(X)$ は L 上の有限次元ベクトル空間である．X の次元が n なら，$i<0$ または $i>2n$ において $H^i(X)=0$ である.

性質 2 (Poincaré 双対定理): X の次元を n とすると，**向き付け写像**と呼ばれる同形 $H^{2n}(X)\xrightarrow{\cong}L$ が関手的に定まる．さらに，カップ積と向き付け写像から定まる双線形形式

$$H^i(X)\times H^{2n-i}(X)\longrightarrow H^{2n}(X)\cong L,\qquad (\alpha,\beta)\mapsto\alpha\cdot\beta$$

は非退化である．X の次元を n，Y の次元を m としたとき，射 $f\colon X\to Y$ による引き戻し写像 $f^*\colon H^i(Y)\longrightarrow H^i(X)$ の Poincaré 双対を

$$f_*\colon H^i(X)\longrightarrow H^{i+2(m-n)}(Y)$$

で表す.

性質 3 (Künneth 公式): X,Y に対し，直積からの射影をそれぞれ $p\colon X\times Y\to X,\ q\colon X\times Y\to Y$ とおく．このとき，写像

$$H^*(X)\otimes H^*(Y)\xrightarrow{\cong}H^*(X\times Y),\qquad \alpha\otimes\beta\mapsto(p^*\alpha)\cdot(q^*\beta)$$

は同形である.

性質 4 (サイクル写像): X 上の余次元 i の代数的サイクルのなす群を $C^i(X)$ とおく．**サイクル写像**と呼ばれる写像

$$\gamma_X\colon C^i(X)\longrightarrow H^{2i}(X)$$

が存在し，次をみたす.

- $f\colon X\to Y$ に対し $f^*\circ\gamma_Y=\gamma_X\circ f^*$，$f_*\circ\gamma_X=\gamma_Y\circ f_*$.
- $Z\in C^i(X),W\in C^j(Y)$ に対し，$\gamma_{X\times Y}(Z\times W)=\gamma_X(Z)\otimes\gamma_Y(W)$.
- X が 1 点のときは，$C^0(X)=\mathbb{Z},\ H^0(X)=L$ である．$\gamma_X\colon\mathbb{Z}\to L$ は 1 を 1 にうつす.

性質 5 (弱 Lefschetz 定理): X の次元を n とおく．X は射影的なので,（十分大きな次元の）射影空間に含まれる：$X\subset\mathbb{P}^m$．$H\subset\mathbb{P}^m$ を超平面とし，超平面切断 $H\cap X$ は滑らかであると仮定する．包含写像を $h\colon H\cap X\hookrightarrow X$ とおくと，引き戻し写像

$$h^*\colon H^i(X)\longrightarrow H^i(H\cap X)$$

は $i\le n-2$ で同形であり，$i=n-1$ で単射である.

性質 6 (強 Lefschetz 定理): 性質 5 と同様の仮定の下で，**Lefschetz 作用素**を次のように定める：

$$L\colon H^i(X) \longrightarrow H^{i+2}(X), \qquad \alpha \mapsto L\alpha := \alpha \cdot \gamma_X(H \cap X)$$

（$H \cap X$ は X の余次元 1 の代数的サイクルなので，$\gamma_X(H \cap X) \in H^2(X)$ である.）任意の $i \geq 1$ に対し，次の写像は同形である：

$$L^i\colon H^{n-i}(X) \xrightarrow{\cong} H^{n+i}(X).$$

$P^{n-i}(X) := \operatorname{Ker}\bigl(L^{i+1}\colon H^{n-i}(X) \to H^{n+i+2}(X)\bigr)$ を**原始部分**という．性質 6 から，$i \leq n$ に対し，$H^i(X)$ は**原始分解**

$$H^i(X) = P^i(X) \oplus LH^{i-2}(X) = \bigoplus_{j \geq 0} L^j P^{i-2j}(X)$$

を持つことが分かる．次数を 2 だけ下げる作用素

$$\Lambda\colon H^i(X) \longrightarrow H^{i-2}(X)$$

を次のように定義する．$0 \leq i \leq n$ のとき，任意の $x \in H^i(X)$ は $x = \sum_{j \geq 0} L^j x_j$ ($x_j \in P^{i-2j}(X)$) と一意的に書ける．$\Lambda x = \sum_{j \geq 1} L^{j-1} x_j$ と定める．$n < i \leq 2n$ のとき，任意の $x \in H^i(X)$ は $x = \sum_{j \geq i-n} L^j x_j$ ($x_j \in P^{i-2j}(X)$) と一意的に書ける．$\Lambda x = \sum_{j \geq i-n} L^{j-1} x_j$ と定める．

4.2. **Weil コホモロジーの例.** 今日では様々な種類のコホモロジー理論が §4.1 の公理をみたすことが知られている．

(1) 基礎体 K を複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体とする（例えば，$K = \mathbb{C}$ や $\overline{\mathbb{Q}}$）．係数体を $L = \mathbb{Q}$ とおく．$X(\mathbb{C})$ は複素多様体である（特に位相多様体である）から，その特異コホモロジー（**Betti コホモロジー**）

$$H^*\bigl(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}\bigr) = \bigoplus_i H^i\bigl(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}\bigr)$$

を考えることができる．これは Weil コホモロジーの公理をみたす.

(2) 基礎体 K を標数 0 の代数的閉体とし，係数体を $L = K$ とおく．X 上の代数的 de Rham 複体の超コホモロジーにより，X の **de Rham コホモロジー**

$$H^*_{DR}\bigl(X/K\bigr) = \bigoplus_i H^i_{DR}\bigl(X/K\bigr)$$

が定まる．これは Weil コホモロジーの公理をみたす.（$K = \mathbb{C}$ であれば，これは Betti コホモロジーに "$\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$" したものと同形である.）

(3) 基礎体 K を任意の代数的閉体とし，ℓ を K で可逆な素数とする．係数体を $L = \mathbb{Q}_\ell$ とおく．$\mathbb{Q}_\ell$ 上のベクトル空間としての同形 $\mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell(1)$ を固定する．X の（ℓ 進）**エタールコホモロジー**

$$H^*\bigl(X, \mathbb{Q}_\ell\bigr) = \bigoplus_i H^i\bigl(X, \mathbb{Q}_\ell\bigr)$$

は Weil コホモロジーの公理をみたす．性質 1〜5 は [SGA] で証明されている．性質 6 は Deligne が "Weil II"（[De3]) で証明している（§3.9 を参照）．

(4) 基礎体 K を標数 $p > 0$ の代数的閉体とし，L を Witt 環 $W(K)$ の商体とする[58]．このとき，X の**クリスタルコホモロジー**

$$H^*_{\mathrm{crys}}\bigl(X/W(K)\bigr) \otimes_{W(K)} L = \bigoplus_i H^i_{\mathrm{crys}}\bigl(X/W(K)\bigr) \otimes_{W(K)} L$$

は Weil コホモロジーの公理をみたす．性質 4 以外は Katz-Messing が，Deligne による "Weil II" の結果を用いて，ℓ 進エタールコホモロジーの場合に帰着して証明している（[KM]）．性質 4 は Gillet-Messing，Gros による（[GM], [Gros]）．

4.3. **スタンダード予想と Weil 予想.** ここでは,「Weil コホモロジー」を 1 つ固定して考える．§3.6 に述べた方法と同様にして，§4.1 の性質のみから，Lefschetz 跡公式が形式的に導かれる（性質 5, 性質 6 は不要である）．そして，合同ゼータ関数の有理性（予想 3.4（1））と関数等式（予想 3.4（2））が自然に証明される．

以下では，X を代数的閉体 K 上の滑らかな射影的代数多様体とし，X の次元を n とおく．

定義 4.1. X 上の余次元 i の代数的サイクル $\alpha, \beta \in C^i(X)$ が**数値的同値**であるとは，任意の $\gamma \in C^{n-i}(X)$ との交点数が等しいことをいう：$\alpha\cdot\gamma = \beta\cdot\gamma$. また，$\alpha, \beta \in C^i(X)$ が**ホモロジー同値**であるとは，サイクル写像の像が等しいことをいう：$\gamma_X(\alpha) = \gamma_X(\beta)$.

予想 4.2. $\alpha, \beta \in C^i(X)$ が数値的同値であることと，ホモロジー同値であることは同値．特に,「ホモロジー同値」は Weil コホモロジーのとり方によらない[59].

Grothendieck は Riemann 予想の類似（予想 3.4（3））を証明するために，スタンダード予想と呼ばれる予想を提出した．

---

[58] $L = \mathrm{Frac}\ W(K)$ は標数 0 の完備離散付値体で，p が素元で，K が剰余体となるもの．

[59] α, β がホモロジー同値であれば数値的同値であることの証明はやさしい．逆向きは一般には知られていない．

予想 4.3 (Lefschetz スタンダード予想). 原始分解から定まる作用素 Λ: $H^i(X) \to H^{i-2}(X)$ は代数的サイクルから来る．すなわち，$X \times X$ 上の余次元 $n-1$ の代数的サイクル $\alpha \in C^{n-1}(X \times X)$ が存在して，各 i に対して，α が導く写像

$$H^i(X) \longrightarrow H^{i-2}(X), \qquad x \mapsto p_{2*}\big((p_1^* x) \cdot \alpha\big)$$

は Λ に等しい．

予想 4.4 (Hodge スタンダード予想). $i \le n/2$ とする．$\gamma_X : C^i(X) \to H^{2i}(X)$ の像で生成された $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を $A^i(X)$ とおく[60]．$\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 $A^i(X) \cap P^{2i}(X)$（$P^{2i}(X)$ は原始部分）に定まる双線形形式

$$\big(A^i(X) \cap P^{2i}(X)\big) \times \big(A^i(X) \cap P^{2i}(X)\big) \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad (x, y) \mapsto (-1)^i \big(L^{n-2i} x \cdot y\big)$$

は正定値である．すなわち，$x \in A^i(X) \cap P^{2i}(X)$, $x \neq 0$ に対し，$(-1)^i\big(L^{n-2i} x \cdot x\big) > 0$.

予想 4.4 は Hodge 理論における不等式を代数的サイクルの言葉で述べたものであり，$n \le 2$ なら解決されている．また，K の標数が 0 なら，$K = \mathbb{C}$ の場合に帰着して Hodge 理論を用いて証明することができる．一方で，予想 4.3 は（$K = \mathbb{C}$ でも）未解決である．予想 4.3 と予想 4.4 から，予想 4.2 が導かれることが知られている．

Grothendieck は，Weil や Serre の結果を踏まえて,「Weil コホモロジーの存在」と「スタンダード予想（予想 4.3，予想 4.4）」から Riemann 予想の類似（予想 3.4（3））が導かれることを示した.（詳しくは [Groth], [Kl], [Kl2] を参照.）

定理 4.5 (Weil コホモロジーの存在＋スタンダード予想 $\Rightarrow$ Weil 予想). $K = \overline{\mathbb{F}}_q$ とする．§4.1 の “公理” をみたす Weil コホモロジーを一つ固定し（存在を仮定する），さらに K 上の滑らかな射影的代数多様体に対して予想 4.3 と予想 4.4 がなりたつと仮定する．このとき，$\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな射影的代数多様体 X に対し，Frobenius 射 F の $H^i(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q)$ への作用は半単純である[61]．さらに，F の固有値 α は代数的数で，そのすべての共役の複素絶対値は $q^{i/2}$ に等しい.

こうして Riemann 予想の類似（予想 3.4（3））の主張は

- §4.1 の “公理”（性質 1〜6）をみたす「Weil コホモロジー」の存在
- 2 つのスタンダード予想（予想 4.4，予想 4.4）

に帰着された．1968 年にスタンダード予想を提出した論文 [Groth] の 198 ページにおいて，Grothendieck は次のように述べている：

[60] すなわち，$A^i(X)$ は $C^i(X) \otimes \mathbb{Q}$ をホモロジー同値で割った群である
[61] すなわち，対角化可能な行列で表されるということ.

『特異点解消問題と並んで，スタンダード予想の解決は代数幾何学における最も急を要する課題であると思われる.』

しかしながら，今日でも，スタンダード予想は（両方とも）未解決である．Weil 予想は Deligne によって解決されたが ([De2], [De3])，その証明は Grothendieck が当初想定していたものとは異なり，スタンダード予想を用いないものであった[62].

Grothendieck 自身は，Weil 予想の証明を目指して Weil コホモロジーの枠組みを与えたものの，自らが創始したエタールコホモロジーがその "公理" を満たすことは証明できなかった.（実際，[SGA] においては，エタールコホモロジーに関する強 Lefschetz 定理は未解決問題として残っている.）§4.2 でも述べたように，エタールコホモロジーは Weil コホモロジーの "公理" をみたす．しかし，皮肉なことに，その証明には，Deligne による "Weil II" ([De3]) の結果が用いられる．Grothendieck の当初の期待とは逆に，Weil 予想（の Deligne による一般化）の帰結として，Weil コホモロジーの存在が証明されたのである.

4.4. **Grothendieck 理論の夢 — モチーフの圏 "$\mathscr{M}_K$"，半単純性.** 代数多様体のコホモロジーは様々な種類の分解を持つ．もちろん，コホモロジーの次数による分解

$$H^*(X) = \bigoplus_i H^i(X)$$

は常に存在する．もし X が $X = Y \times Z$ という形に直積に分解されていれば，Künneth 公式による分解

$$H^i(X) = \bigoplus_{j+k=i} H^j(Y) \otimes H^k(Z)$$

がある．また，一般に強 Lefschetz 定理（§4.1, 性質 6）から導かれる原始分解

$$H^i(X) = \bigoplus_{j \geq 0} L^j P^{i-2j}(X)$$

がある．こうした "分解" はすべての「Weil コホモロジー」でなりたつ．X 自身が何らかの意味で（コホモロジー理論によらない形で）"分解" していて，上で見たコホモロジーの分解はその表れである，と考えることはできないだろうか？

[62] q と互いに素な素数 ℓ に対し，ℓ 進エタールコホモロジーは Weil コホモロジーである．この場合，定理 4.5 の一つ目の主張，すなわち，Frobenius 射 F のエタールコホモロジー $H^i\big(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell\big)$ への作用が半単純であることは未解決である.

Grothendieck は，スタンダード予想（予想 4.3, 予想 4.4）の仮定の下に，**モチーフの圏**[63] $\mathscr{M}_K$ と反変関手

$$h\colon \bigl(K \text{ 上の滑らかな射影的代数多様体}\bigr) \longrightarrow \mathscr{M}_K$$

を構成し，$X \mapsto h(X)$ が "**普遍的なコホモロジー理論**" の一種であることを示した．そして，（良い性質をみたす）コホモロジー理論 $X \mapsto H^*(X)$ は，この関手 h を経由することを（スタンダード予想の仮定の下で）示した．

Grothendieck によるモチーフの圏 $\mathscr{M}_K$ の構成は，次の通りである．まず，K 上の滑らかな射影的代数多様体を対象とし，射が

$$\mathrm{Hom}\bigl(h(X), h(Y)\bigr) = C^n_{\mathrm{neq}}(X \times Y, \mathbb{Q})$$

で与えられるような圏 $\mathscr{M}'$ を考える．X, Y に対応する対象を $h(X), h(Y) \in \mathscr{M}'$ で書いた．n は X の次元であり，$C^n_{\mathrm{neq}}(X \times Y, \mathbb{Q})$ は $X \times Y$ 上の余次元 n の $\mathbb{Q}$-係数の代数的サイクルのなす群 $C^n(X \times Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を数値的同値で割った群である．$\mathscr{M}'$ における射の合成は代数的対応の合成で定める．すなわち，X, Y, Z（X の次元を n，Y の次元を m とおく）に対し，$p_{12}\colon X \times Y \times Z \longrightarrow X \times Y$，$p_{23}\colon X \times Y \times Z \longrightarrow Y \times Z$，$p_{13}\colon X \times Y \times Z \longrightarrow X \times Z$ とおき，$\alpha \in C^n_{\mathrm{neq}}(X \times Y, \mathbb{Q})$ と $\beta \in C^m_{\mathrm{neq}}(Y \times Z, \mathbb{Q})$ の合成を

$$\beta \circ \alpha = (p_{13})_*\bigl(p_{12}^*\alpha \cdot p_{23}^*\beta\bigr) \in C^n_{\mathrm{neq}}(X \times Z, \mathbb{Q})$$

で定める．(エタールコホモロジーと同様に，C^n_{neq} に対しても f^*, f_* などの写像が定義できる．）この圏 $\mathscr{M}'$ に，自己準同形環 $\mathrm{Hom}\bigl(h(X), h(X)\bigr)$ のベキ等元による像を付け加え，さらに対象の「Tate 捻り」(ℓ 進エタールコホモロジーの世界で Tate 捻りに対応するもの）を付け加えたものが $\mathscr{M}_K$ である．(詳しくは [Jan] を参照.）

Grothendieck は（スタンダード予想を仮定して）この圏 $\mathscr{M}_K$ が**半単純アーベル圏**であることを示した．これにより，**任意の** $h(X) \in \mathscr{M}_K$ **は単純な対象の和** $h(X) = \bigoplus_i \alpha_i$ **に "分解" される**ことが分かる．代数多様体 X を "分解" することで**モチーフ** α_i が得られ[64]，X のコホモロジー論的な性質はすべてこのモチーフ α_i たちがコントロールすることになる．これは極めて著しい性質である．Grothendieck がこれは "**奇跡**" であると言ったという記録が残っている[65].

[63]今日では**数値的同値モチーフ** (neq motives, numerical equivalence motives) の圏と呼ばれている．

[64]広辞苑第五版によると，モチーフには「音楽形式を構成する最小単位」という意味がある．著者にはフランス語の "motif" に込められた微妙な意味を読み取ることはできないが（安っぽい辞書を引くと,「motif = モチーフ」とだけ書かれていることもある），代数多様体のコホモロジーの奏でる音楽を構成する「単位」という意味を込めたのかもしれない．

[65][Kl2]，5 ページ，13 行目に Kleiman による記述がある．

4.5. **Jannsen の定理.** はたして “奇跡” は起こるのだろうか．圏 $\mathscr{M}_K$ 自身はスタンダード予想を仮定しなくても定義可能である．また,「数値的同値」以外の同値関係（例えば，Weil コホモロジーを一つ固定したときの「ホモロジー同値」）を用いて $\mathscr{M}_K$ と類似の圏を構成することもできる．

Grothendieck がスタンダード予想を提出してから 20 年以上が経過した 1992 年に，Jannsen は，**スタンダード予想を仮定せずに**次の定理を示した．

定理 4.6 ([Jan])**.** 「数値的同値」から定義された圏 $\mathscr{M}_K$ は半単純アーベル圏である．

Jannsen によるこの定理の証明は Lefschetz 跡公式を用いた鮮やかなものであり，非常に短い．(論文自体もたったの 6 ページである！）Jannsen は，さらに,（数値的同値とは限らない同値関係から定義された）圏が半単純アーベル圏であるためには，その圏が数値的同値から作られることが必要十分であることを示している．したがって，もし “奇跡” を信じるならば，$\mathscr{M}_K$ こそが正しいモチーフの圏を与えていることになる．

スタンダード予想は現在もなお未解決であり，したがって，Grothendieck の夢がすべて実現されたわけではない．しかし，Jannsen の定理により，少なくとも「モチーフの圏」と呼ばれるべき圏 $\mathscr{M}_K$ は得られたことになる[66].

著者は 2008 年 1 月 3 日から 12 日にかけてインドの Tata 研究所で行われた国際研究集会「代数的サイクル，モチーフ，志村多様体」に参加し，Jannsen 氏から論文 [Jan] についての話を直接伺うことができるという幸運を得た．本節の最後に，Jannsen 氏の言葉を引用しよう．

> 『私が論文 [Jan] を書いたのは，心理的な理由によるものでした．それ以前には，多くの人々がモチーフのことを “いわゆるモチーフと呼ばれているもの” (so-called motives) と呼んでいました．しかし，私の論文が出版されてから，そう呼ぶ人はいなくなりました.』

[66]Jannsen の定理は応用上は不十分であることが多い．ℓ 進エタールコホモロジーが，関手 h を経由することは証明できない．(そのためには予想 4.2 — これはスタンダード予想の帰結である — を仮定する必要がある）また，Jannsen の定理から，エタールコホモロジーへの Frobenius 作用の半単純性を導くことはできない．$\mathscr{M}_K$ が「正しい」モチーフの圏であることは疑いようはないが，スタンダード予想が解決されていない現状では，応用上は，$\mathscr{M}_K$ よりももっと扱いやすい圏を使わざるをえないこともある．

5. 整数論における「モチーフ的な考え方」

5.1. **保型形式とモチーフ.** §2.9 では，保型形式に伴う Galois 表現について述べた．すなわち，(適当な条件をみたす）尖点的保型形式 $f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$ と素数 ℓ に対して，$\mathbb{Q}$ の 2 次元 ℓ 進表現 $\rho_{f,\ell}\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\longrightarrow GL(V)$ が存在し，

$$L(s,f)=L(s,\rho_{f,\ell})$$

をみたす（定理 2.10）：

$$\boxed{\text{保型形式 } f} \rightsquigarrow \boxed{\text{Galois 表現 } \rho_{f,\ell}}$$

しかも，f の重さが $k\geq 2$ であれば，この対応は，**久賀 - 佐藤多様体**と呼ばれる $(k-1)$ 次元代数多様体 X の $(k-1)$ 次エタールコホモロジーから，Hecke 環の作用によって「f に対応する部分」を切り取ることで作られる：

$$\boxed{\text{保型形式 } f} \rightsquigarrow \boxed{\text{久賀 - 佐藤多様体 } X} \rightsquigarrow \boxed{\text{Galois 表現 } \rho_{f,\ell}}$$

さて，§4.4 で述べた「モチーフの理論」の考え方を使って，この対応をもう少し推し進めてみよう．久賀 - 佐藤多様体 X 上には Hecke 作用素が代数的対応として作用するから，その作用により X のモチーフ “$h(X)\in\mathscr{M}_K$” を分解し，f に対応する部分モチーフ “$M_f\in\mathscr{M}_K$”（保型形式 f のモチーフ）を取り出すことはできないだろうか？そして，Galois 表現 $\rho_{f,\ell}$ を，モチーフ “M_f” のエタールコホモロジー $H^*(M_f,\mathbb{Q}_\ell)$ として理解することはできないだろうか？

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \boxed{\text{モチーフ “}M_f\text{”}} \arrow[dr, rightsquigarrow] & \\ \boxed{\text{保型形式 } f} \arrow[ur, rightsquigarrow, dash] & & \boxed{\text{Galois 表現 } \rho_{f,\ell}} \end{tikzcd}$$

実際，これは（適当な修正の下で[67]）可能であり，保型形式のモチーフは Scholl によって構成されている．

久賀 - 佐藤多様体 X そのものよりも，X を “分解” して得られるモチーフ “M_f” こそが保型形式 f に対応すべきであるという考え方は重要である．一般に，保型形式 f

[67] スタンダード予想は未解決なので，モチーフのエタールコホモロジーを定義するためには,「数値的同値」を「ホモロジー同値」に置き換えて論じる必要がある．詳しくは [Sch] を参照．

に伴う Galois 表現をエタールコホモロジーを用いて構成する方法は複数あるが[68]，その場合でも，背後にあるモチーフ "M_f" そのものは一意的である（に違いない！）と期待することができる[69].

5.2. **Fontaine-Mazur 予想.** それでは，逆に，Galois 表現 ρ から出発して，それに対応するモチーフや保型形式を作り出すことはできないだろうか？この問題に関して，Fontaine と Mazur は次の著しい予想を提出した（[FM][70]）.

予想 5.1 (Fontaine-Mazur 予想). K を代数体とする．ℓ を素数とし，ρ を絶対既約な n 次元 ℓ 進表現とする．ρ が滑らかな射影的代数多様体のエタールコホモロジー（の適当な Tate 捻り）の部分商として得られることと，ρ が次の 2 つの条件

(1) ρ が分岐する素点は有限個.
(2) ℓ を割り切る素点 v に対し，ρ_v は de Rham.

をみたすことは同値である.

予想 5.1 の特筆すべきところは,（勝手に与えられた）ρ に対し，それが代数多様体のエタールコホモロジーから得られるためには，条件 (1),(2) "だけ" で十分であることを（大胆にも）予想したことにある．特に，Weil 予想（予想 3.4）を用いると，条件 (1),(2) "だけ" から，有限個を除くすべての有限素点 v に関する主張

> 『「重さ」と呼ばれる整数 w が存在して，有限個を除くすべての有限素点 v に対し，v における幾何的 Frobenius 元 Frob_v の固有値は代数的数であり，そのすべての共役の複素絶対値は $q_v^{w/2}$ に等しい（q_v は v の剰余体の位数）』

が導かれてしまう[71].

---

[68]例えば志村曲線やある種のユニタリ型志村多様体が使える場合もある．総実代数体への底変換（持ち上げ）を使って構成することが可能な場合もある．また，f が虚数乗法を持つ場合には，さらに別の構成も可能である.

[69]実際，適当な予想（Tate 予想など（[Tat]））を仮定すれば,「"M_f" のモチーフとしての一意性」を証明することもできる.

[70]Fontaine-Mazur 予想については，[Tay1], [Tay3], [Kis] も参照.

[71]これは極めて非自明である．各 v に対してこのような整数 w が存在することも自明ではないし，仮に存在したとしても，そのような w が v によらないことも自明ではない！$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ には，各素点 v に対して（位相群としては比較的単純な）$\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ が含まれているが，これらはばらばらに含まれているのではなく，非常に強い規則をもっていると考えることができる．これは，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ に対する**非可換類体論**あるいは**非可換相互法則**の一つの見方ということもできる.

予想 5.1 に Langlands による予想を組み合わせることで，条件 (1),(2) をみたす ρ に，$GL_n(\mathbb{A}_K)$ の尖点的な**保型表現** π が対応することが予想される．したがって，

$$\begin{tikzcd} & \boxed{\text{モチーフ}} \arrow[dl, leftrightsquigarrow] \arrow[dr, leftrightsquigarrow] & \\ \boxed{\text{保型表現}} \arrow[rr, leftrightsquigarrow] & & \boxed{\text{Galois 表現}} \end{tikzcd}$$

という図式が期待されることになる．

もちろん，この図式が実現されているケースは（エタールコホモロジーにより「代数多様体から Galois 表現を作る」ことが可能になったことを除けば）それほど多くはない[72]．しかし，この図式を念頭に置きながら具体的な問題を考察することは，個々の問題への本質的なアプローチを探る上でも大切なことである．

5.3. **最近の話題 「Galois 表現からモチーフを作る」.** 最近では，Wiles（[Wi]）や Taylor-Wiles（[TW]）により創始された「$R = T$ 定理」の発展により，いくつかの場合に「Galois 表現の保型性」，すなわち，

$$\boxed{\text{保型表現}} \leftsquigarrow \boxed{\text{Galois 表現}}$$

という方向の対応が得られるようになってきた．その議論の中では,「$R = T$ 定理」に加えて，

> 『与えられた mod ℓ 表現に対し，それをエタールコホモロジー（の一部）として実現するような代数多様体（モチーフ）を構成する』

という手法が用いられる（例えば，[Wi], [SBT], [Tay1], [HSBT] を参照.）．これは，本稿で今まで述べてきた方向とは逆の,「Galois 表現からモチーフを作る」という “新しい” 方向であるが，方程式論的に見ると，少なくとも 19 世紀の Hermite や Klein の研究にさかのぼる “古い” 手法でもある[73]．与えられた Galois 表現 ρ を調べるために，“都合の良いモチーフ” を作ればよいという発想は[74]，今後，ますます重要になってくるかもしれない．

---

[72] もちろん．類体論によって,「階数 1」の場合はこの対応が実現されている．

[73] [SBT], 284 ページを見よ．[Se8] も参照.

[74] 佐藤 - Tate 予想は楕円曲線（やその自己ベキ）に対する主張であるが，その証明の中で，高次元 Calabi-Yau 超曲面のエタールコホモロジーが補助的に用いられているのは，その一例であろう ([HSBT]).

6. 演習問題

問 1. K を体とし，$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to GL_n(\mathbb{C})$ を連続準同形とする．ただし，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ には Krull 位相を入れ，$GL_n(\mathbb{C})$ には普通の（位相多様体としての）位相を入れる．このとき，ρ の像は有限群であり，ρ は Artin 表現となる（すなわち，$GL_n(\mathbb{C})$ に離散位相を入れたときに連続となる）ことを示せ.

問 2. E を ℓ 進数体 $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大とする．K を体とし，$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to GL_n(E)$ を ℓ 進表現とする.（すなわち，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ には Krull 位相を入れ，$GL_n(E)$ には ℓ 進位相を入れる.）このとき，ある $g \in GL_n(E)$ が存在して，$g \cdot \rho\bigl(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\bigr) \cdot g^{-1}$ が $GL_n(O_E)$ に含まれることを示せ.（O_E は E の整数環である.）

問 3. K を体とし，$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を連続準同形とする．ただし，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ には Krull 位相を入れ，$GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ には ℓ 進位相を入れる．このとき，$\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大 E が存在して，ρ の像は $GL_n(E)$ に含まれることを示せ.（ヒント：Baire のカテゴリー定理を用いよ.）

問 4. 代数体の ℓ 進表現 ρ であって，無限個の有限素点で分岐するものを構成せよ.（このような ρ は代数多様体のエタールコホモロジー（やその Tate 捻り）の部分商として作ることはできない.）

問 5. $a \in \mathbb{Q}$ を有理数とする．代数体の ℓ 進表現 ρ であって，有限個を除くすべての素点 v で不分岐で，Frob_v の固有値は代数的数で，そのすべての共役の複素絶対値が q_v^a（q_v は v の剰余体の位数）に等しいものを構成せよ.（$a \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ であれば，このような ρ は代数多様体のエタールコホモロジー（やその Tate 捻り）の部分商として作ることはできない.）

問 6. 重さ 2, レベル 11 の保型形式
$$f = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2(1-q^{11n})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_p q^n$$
の q 展開の係数 a_p を小さな素数 p に対して具体的に計算せよ．また，楕円曲線 E : $Y^2Z + YZ^2 = X^3 - XZ^2$ に対し，$a_p = 1 + p - \#E(\mathbb{F}_p)$ を確かめよ.（計算機が使える人は，$p \leq 10,000$ 位まで計算してみてください.）

問 7. p を素数とし，q を p のベキとする．$\mathbb{F}_q$ 上の楕円曲線は，$1+q-\#E(\mathbb{F}_q) \equiv 0 \pmod{p}$ をみたすとき，**超特異**という．E を代数体 K 上の楕円曲線とする．$E \bmod v$ が超特異でない有限素点 v が無限個存在することを示せ.（余力のある人は，$K=\mathbb{Q}$ の時に，谷山 - 志村予想を用いた別証明も考えてみてください.）（未解決問題 : Ramanujan の τ 関数について，$\tau(p)$ が p で割れない素数 p は無限個存在するか？）

問 8. 群 G，正標数の体 E と，n 次元表現 $\rho, \rho' \colon G \to GL_n(E)$ であって，$\mathrm{Tr}(\rho(\sigma)) = \mathrm{Tr}(\rho'(\sigma))$ $(\forall \sigma \in G)$ だが，半単純化 $\rho^{ss}, (\rho')^{ss}$ が同値でない例を挙げよ.

問 9. 次の代数曲線に対し合同ゼータ関数を計算せよ.

(1) $\mathbb{F}_p$ 上のアフィン空間 $\mathbb{A}^n$，$\mathbb{A}^n \backslash \{0\}$（0 は原点），射影空間 $\mathbb{P}^n$，直積 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.
(2) $\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線 $Y^2Z = X^3 + XZ^2$.　(小さい素数 p で具体的に)
(3) $\mathbb{F}_p$ 上の超楕円曲線 $Y^2Z^3 = X^5 - XZ^4$.　(小さい素数 p で具体的に)

問 10. $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな射影的代数多様体 X, Y に対して Weil 予想がなりたてば，直積 $X \times Y$ に対してもなりたつことを示せ.

問 11. X を $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元の滑らかな射影的代数多様体とする．χ を X の Euler 数とする (χ は対角集合 $\Delta \subset X \times X$ の自己交点数)．X の合同ゼータ関数 $Z(T, X)$ は，次の形の関数等式をみたす :

$$Z\left(\frac{1}{q^n T}, X\right) = \pm q^{n\chi/2} \cdot T^{\chi} \cdot Z(T, X)$$

符号が $+1$ である X の例と，-1 である X の例を挙げよ.

問 12. X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな射影的代数曲線とする．X の種数を g とおく．X に対する Weil 予想（Riemann 予想の類似）を用いて，$\mathbb{F}_q$-有理点の個数 $\#X(\mathbb{F}_q)$ が不等式

$$\left|\, 1 + q - \#X(\mathbb{F}_q) \,\right| \leq 2g\sqrt{q} \qquad \text{（\textbf{Hasse-Weil の不等式}）}$$

をみたすことを示せ．また，逆に，すべての $n \geq 1$ に対して Hasse-Weil の不等式

$$\left|\, 1 + q^n - \#X(\mathbb{F}_{q^n}) \,\right| \leq 2g\sqrt{q^n}$$

がなりたてば，X は Weil 予想（Riemann 予想の類似）をみたすことを示せ.

問 13. X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな射影的代数曲線とする．等式 $\#X(\mathbb{F}_q) = q+1+2g\sqrt{q}$ がなりたつとき，X を**極大曲線**という．

(1) $q = p^r$（p は素数，r は奇数）のとき，$\mathbb{F}_q$ 上に極大曲線は存在しないことを示せ．

(2) $q = p^r$（p は素数，$r \geq 1$）とし，X を $\mathbb{F}_{q^2}$ 上の極大曲線とする．このとき，X の種数 g は，$g \leq q(q-1)/2$ をみたすことを示せ．

(3) $q = p^r$（p は素数，$r \geq 1$）とする．$Y^qZ + YZ^q = X^{q+1}$ で定まる $\mathbb{F}_{q^2}$ 上の射影的代数曲線を X とおく (**Hermite 曲線**).

  (a) X は滑らかな代数曲線であることを示せ．また，その種数を求めよ．

  (b) $\#X(\mathbb{F}_{q^2})$ を求めよ．また，X は極大曲線であることを示せ．

  (c) X の $\mathbb{F}_{q^2}$ 上の合同ゼータ関数 $Z(T, X)$ を求めよ．

問 14. X を $\mathbb{Q}$ 上の滑らかな射影的代数多様体とする．$f(T) \in \mathbb{Z}[T]$ を整数係数多項式とし，有限個を除くすべての素数 p に対して $\#X(\mathbb{F}_p) = f(p)$ がなりたつと仮定する．このとき，$X(\mathbb{C})$ の奇数次の Betti 数は 0 であり，$X(\mathbb{C})$ の $2m$ 次の Betti 数は $f(T)$ における T^m の係数に等しいことを示せ．

問 15. X, Y を代数体 K 上の滑らかな射影的代数多様体とする．K の有限素点 v を 1 つ固定し，X, Y は v で良い還元を持つと仮定する．さらに，すべての n に対して $\#X(\mathbb{F}_{q^n}) = \#Y(\mathbb{F}_{q^n})$ が成り立つと仮定する（v における剰余体を $\mathbb{F}_q$ とおいた）．このとき，$X(\mathbb{C}), Y(\mathbb{C})$ の Betti 数が等しいことを示せ．また，これは Hodge 数に対してはなりたたないことを示せ (反例を挙げよ).

問 16. X, Y を代数体 K 上の滑らかな射影的代数多様体とする．有限個を除くすべての有限素点 v に対し， $\#X(\kappa(v)) = \#Y(\kappa(v))$ なら ($\kappa(v)$ は v の剰余体)，$X(\mathbb{C}), Y(\mathbb{C})$ の Hodge 数が等しいことを示せ. (Hodge 分解から，$X(\mathbb{C}), Y(\mathbb{C})$ の Betti 数が等しいことも分かる.)

問 17. 体 K 上の $K3$ 曲面 X は, $X \otimes_K \overline{K}$ の Picard 数が 22 であるとき**超特異**であるという（超特異 $K3$ 曲面は標数 0 の体上には存在しない）. (q によらない) 自然数 N が存在して，任意の有限体 $\mathbb{F}_q$ と，超特異 $K3$ 曲面 $X, Y/\mathbb{F}_q$ に対し，$\#X(\mathbb{F}_{q^N}) = \#Y(\mathbb{F}_{q^N})$ となることを示せ. (ヒント：$K3$ 曲面の Betti 数は，$b_0 = 1,\ b_1 = 0,\ b_2 = 22,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1$ である.)

問 18 (Weil)**.** C を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな射影的代数曲線とする．$X=(C\times C)\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}}_q$ とおき，$\Delta\subset X$ を対角集合，$\Gamma\subset X$ を Frobenius 射 $F\colon C\to C$ のグラフとする．C の種数を g とおく．

(1) $\Delta\cdot\Delta=2-2g$，$\Gamma\cdot\Gamma=q(2-2g)$ を示せ．

(2) 交点数 $\Delta\cdot\Gamma$ が C の $\mathbb{F}_q$-有理点の個数 $\#C(\mathbb{F}_q)$ に等しいことを示せ．

(3) X は Hodge スタンダード予想をみたすことが知られている．これを用いて，Hasse-Weil の不等式

$$\big|1+q-\#C(\mathbb{F}_q)\big|\le 2g\sqrt{q}$$

を示せ．

問 19 (Jannsen)**.** X を代数的閉体 K 上の n 次元の滑らかな射影的代数多様体とし，K で可逆な素数 ℓ を固定する．$X\times X$ 上の余次元 n の代数的サイクルのなす群を数値的同値で割った群を $C^n_{\mathrm{neq}}(X\times X)$ とおく．また，$E=\mathbb{Q},\ \mathbb{Q}_\ell$ に対し，$C^n(X\times X)\otimes_{\mathbb{Z}}E$ を数値的同値で割った群を $C^n_{\mathrm{neq}}(X\times X,E)$ とおき，(ℓ 進エタールコホモロジーから定まる）ホモロジー同値で割った群を $C^n_{\mathrm{hom}}(X\times X,E)$ とおく．(スタンダード予想を仮定すれば $C^n_{\mathrm{hom}}=C^n_{\mathrm{neq}}$ だが，ここでは仮定しない.）代数的対応の合成で積を入れることにより，$C^n_{\mathrm{neq}}(X\times X,E)$, $C^n_{\mathrm{hom}}(X\times X,E)$ は E 上の代数になる．

(1) $C^n_{\mathrm{neq}}(X\times X)$ は有限生成自由アーベル群であることを示せ．$C^n_{\mathrm{neq}}(X\times X,\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$ 上の有限次元ベクトル空間であることを示せ．また，$C^n_{\mathrm{neq}}(X\times X,\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_\ell=C^n_{\mathrm{neq}}(X\times X,\mathbb{Q}_\ell)$ を示せ．

(2) $C^n_{\mathrm{hom}}(X\times X,\mathbb{Q}_\ell)$ は $\mathbb{Q}_\ell$ 上の有限次元ベクトル空間であることを示せ．

(3) K の標数が 0 のとき，$C^n_{\mathrm{hom}}(X\times X,\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$ 上有限次元であり，その次元は ℓ によらないことを示せ．(補足：K が正標数のときは，$C^n_{\mathrm{hom}}(X\times X,\mathbb{Q})$ が $\mathbb{Q}$ 上有限次元であることは知られていない．その次元が ℓ によらないかどうかも知られていない.）

(4) $\alpha\in C^n_{\mathrm{hom}}(X\times X,\mathbb{Q}_\ell)$ をベキ零元とする．このとき，α のエタールコホモロジー $H^i\big(X,\mathbb{Q}_\ell\big)$ への作用はベキ零であることを示せ．

(5) $I\subset C^n_{\mathrm{hom}}(X\times X,\mathbb{Q}_\ell)$ をベキ零な両側イデアルとする．I の自然な全射 $C^n_{\mathrm{hom}}(X\times X,\mathbb{Q}_\ell)\to C^n_{\mathrm{neq}}(X\times X,\mathbb{Q}_\ell)$ による像が 0 であることを示せ．(ヒント：Lefschetz 跡公式を用いよ.）

(6) $C^n_{\mathrm{neq}}(X\times X,\mathbb{Q}_\ell)$ が $\mathbb{Q}_l$ 上の半単純代数であることを示せ．また，$C^n_{\mathrm{neq}}(X\times X,\mathbb{Q})$ が $\mathbb{Q}$ 上の半単純代数であることを示せ．(ヒント：Jacobson 根基 $J\subset C^n_{\mathrm{hom}}(X\times X,\mathbb{Q}_\ell)$ の像が 0 であることを示せ.）

問 20. $PSL_2(\mathbb{F}_5) = SL_2(\mathbb{F}_5)/\{\pm 1\}$ は交代群 A_5 と同形であることを示せ．また，任意の単射準同形 $i\colon PSL_2(\mathbb{F}_5) \hookrightarrow PSL_2(\overline{\mathbb{Q}})$ に対し，以下の図式が可換になる $i'\colon SL_2(\mathbb{F}_5) \to SL_2(\overline{\mathbb{Q}})$ が一意的に存在することを示せ．また，この i' は単射であることを示せ．

$$\begin{tikzcd} SL_2(\mathbb{F}_5) \arrow[r, dotted, "i'"] \arrow[d] & SL_2(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[d] \\ PSL_2(\mathbb{F}_5) \arrow[r, "i"] & PSL_2(\overline{\mathbb{Q}}) \end{tikzcd}$$

問 21 楕円曲線の等分点から得られる Galois 表現について，次を示せ．

(1) $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(\mathbb{F}_5)$ を $\mathbb{Q}$ の mod 5 表現で，$\det\rho$ が mod 5 円分指標であるとする．このとき，$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E の同形類であって，$E[5]$ への $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の作用が ρ と同値になるものが無限個存在することを示せ．(ヒント：モジュラー曲線 $X(5)$ の適当な Galois 捻りが $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ と同形になることを示せ．1 次分数変換により，$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}) \cong PSL_2(\overline{\mathbb{Q}})$ であることに注意.)

(2) (1) は $\mathbb{Q}$ の mod 3 表現 $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(\mathbb{F}_3)$ に対してもなりたつことを示せ.

(3) (Dieulefait) $p \geq 7$ を素数とする．$\mathbb{Q}$ の mod p 表現 $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(\mathbb{F}_p)$ であって，$\det\rho$ が mod p 円分指標であり，どんな $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対しても $E[p]$ と ρ が同値にならないものが存在することを示せ.

問 22 (L 関数の有理型解析接続 (1))**.** Brauer 誘導定理とは，次のような定理である．

> **定理** G を有限群とし，ρ を G の $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現とする．このとき，可解部分群 $H_1, \ldots, H_r \subset G$ （H_i には重複があるかもしれない）および，H_i の 1 次元表現 $\chi_i \colon H_i \to \mathbb{C}^\times$ と $m_i \in \mathbb{Z}$ が存在して，任意の $\sigma \in G$ に対し，次がなりたつ：
> $$\mathrm{Tr}(\rho(\sigma)) = \sum_{i=1}^{r} m_i \,\mathrm{Tr}\big((\mathrm{Ind}_{H_i}^{G} \chi_i)(\sigma)\big)$$

これを用いて，任意の Artin 表現 $\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_n(\mathbb{C})$ に対し，L 関数 $L(s,\rho)$ が有理型関数として複素平面全体に解析接続されることを示せ.（ヒント：L 関数は誘導表現によって不変である．すなわち，L/K を代数体の有限次拡大とし，$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{L}/L) \to GL(V)$ を有限次元 Galois 表現（Artin 表現または ℓ 進表現）とすると，$L(s,\rho) = L\big(s, \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)}^{\mathrm{Gal}(\overline{L}/K)}\rho\big)$ がなりたつ.）

問 23 (L 関数の有理型解析接続 (2))**.** 素数 ℓ と体同形 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を固定する．また，実数 $t \in \mathbb{R}$ を固定する．代数体 K の ℓ 進表現 ρ に対して，次の条件 (※) を考える．

> (※) 任意の 1 次元 Artin 表現 χ に対し，$L(s, \rho\otimes\chi)$ は有理型関数として複素平面全体に解析接続され，$\mathrm{Re}(s) \geq t$ において正則で零点を持たない.

さて，$\mathbb{Q}$ の ℓ 進表現 ρ が次をみたすとする．

> Galois 拡大 $F/\mathbb{Q}$ が存在し，任意の部分拡大 $F \supset F' \supset \mathbb{Q}$ で F/F' が可解拡大であるものに対し，ρ の制限 $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')}$ は (※) をみたす.

このとき，$L(s,\rho)$ は有理型関数として複素平面全体に解析接続され，$\mathrm{Re}(s) \geq t$ において正則で零点を持たないことを示せ.（ヒント：Brauer 誘導定理を用いよ.）

参考文献

[A1] André, Y., *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses, 17. Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[AC] Arthur, J., Clozel, L., *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Mathematics Studies, 120. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[Ba] Batyrev, V., *Birational Calabi-Yau n-folds have equal Betti numbers*, New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), 1–11, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[BBD] Beilinson, A. A., Bernstein, J., Deligne, P., *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), 5–171, Astérisque, 100, Soc. Math. France, Paris, 1982.

[Bo] Bombieri, E., *Counting points on curves over finite fields (d'après S. A. Stepanov)*, Séminaire Bourbaki, no. 430, (1972/1973).

[BCDT] Breuil, C., Conrad, B., Diamond, F., Taylor, R., *On the modularity of elliptic curves over* $\mathbb{Q}$*: wild 3-adic exercises*, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), no. 4, 843–939.

[Ca] Carayol, H. *Sur les représentations* ℓ*-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19 (1986), no. 3, 409–468.

[CHT] Clozel, L., Harris, M., Taylor, R., *Automorphy for some* ℓ*-adic lifts of automorphic mod* ℓ *representations*, preprint, 2006. (`http://www.math.harvard.edu/~rtaylor/`)

[De1] Deligne, P., *Formes modulaires et représentations* ℓ*-adiques*, Séminaire Bourbaki, no. 355, (1968/69).

[De2] Deligne, P., *La conjecture de Weil. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 43 (1974), 273–307.

[De3] Deligne, P., *La conjecture de Weil. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 52 (1980), 137–252.

[DeS] Deligne, P., Serre, J.-P., *Formes modulaires de poids* 1, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 7 (1974), 507–530.

[DiS] Diamond, F., Shurman, J., *A first course in modular forms*, Graduate Texts in Mathematics, 228. Springer-Verlag, New York, 2005.

[FK] Freitag, E., Kiehl, R., *Étale cohomology and the Weil conjecture*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 13. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[FM] Fontaine, J.-M., Mazur, B., *Geometric Galois representations*, Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), 41–78, Ser. Number Theory, I, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[Fu] Fulton, W. *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, 131. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[GM] Gillet, H., Messing, W., *Cycle classes and Riemann-Roch for crystalline cohomology*, Duke Math. J. 55 (1987), no. 3, 501–538.

[Gros] Gros, M., *Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) No. 21 (1985).

[Groth] Grothendieck, A., *Standard conjectures on algebraic cycles*, Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), pp. 193–199, Oxford Univ. Press, London.

[HN] Harder, G., Narasimhan, M. S., *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves*, Math. Ann. 212 (1974/75), 215–248.

[HSBT] Harris, M., Shepherd-Barron, N., Taylor, R., *A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy*, preprint, 2006. (`http://www.math.harvard.edu/~rtaylor/`)

[HT] Harris, M., Taylor, R., *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, 151. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[Har] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. （邦訳：R. ハーツホーン（高橋宣能, 松下大介訳）,『代数幾何学 1–3』, シュプリンガーフェアラーク東京, 2004–2005 年.）

[Hat] 服部晶夫, 『位相幾何学』, 岩波基礎数学選書, 岩波書店, 1991 年.

[Hot] 堀田良之, 『可換環と体』, 岩波書店, 2006 年.

[Il] Illusie, L., *Miscellany on traces in ℓ-adic cohomology: a survey*, Jpn. J. Math. 1 (2006), no. 1, 107–136.

[It1] Ito, T., *Birational smooth minimal models have equal Hodge numbers in all dimensions*, Calabi-Yau varieties and mirror symmetry (Toronto, ON, 2001), 183–194, Fields Inst. Commun., 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[It2] Ito, T., *Stringy Hodge numbers and p-adic Hodge theory*, Compos. Math. 140 (2004), no. 6, 1499–1517.

[Jan] Jannsen, U., *Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity*, Invent. Math. 107 (1992), no. 3, 447–452.

[Kato] 加藤和也,『Weil 予想とエタールコホモロジー』, 岩波書店（出版予定）.

[Katz] Katz, N., *L-functions and monodromy: four lectures on Weil II*, Adv. Math. 160 (2001), no. 1, 81–132.

[KM] Katz, N., Messing, W., *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. 23 (1974), 73–77.

[Ked] Kedlaya, K., *Fourier transforms and p-adic 'Weil II'*, Compos. Math. 142 (2006), no. 6, 1426–1450.

[KW] Khare, C., Wintenberger, J.-P., *Serre's modularity conjecture I,II*, preprint, 2007. (`http://www.math.utah.edu/~shekhar/papers.html`)

[Kis] Kisin, M., *The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2*, preprint, 2005. (`http://www.math.uchicago.edu/~kisin/preprints.html`)

[Kl] Kleiman, S. L., *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, pp. 359–386. North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968.

[Kl2] Kleiman, S. L., *The standard conjectures*, Motives (Seattle, WA, 1991), 3–20, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[La] Laumon, G., *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 65 (1987), 131–210.

[Ma] Manin, Ju. I., *Correspondences, motifs and monoidal transformations*, Mat. Sb. (N.S.) 77 (119) (1968) 475–507.

[Mil] Milne, J. S., *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, 33. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[Miy] Miyake, T., *Modular forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[Mum] Mumford, D., *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, Oxford University Press, London, 1970.

[Sa] Saito, T., *Modular forms and p-adic Hodge theory*, Invent. Math. 129 (1997), no. 3, 607–620.

[Sch] Scholl, A. J., *Motives for modular forms*, Invent. Math. 100 (1990), no. 2, 419–430.

[Se1] Serre, J.-P., *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6 (1955–1956), 1–42.

[Se2] Serre, J.-P., *Exemples de variétés projectives conjuguées non homéomorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris 258 (1964), 4194–4196.

[Se3] Serre, J.-P., *Une interprétation des congruences relatives à la fonction τ de Ramanujan*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (1967-68), No. 14.

[Se4] Serre, J.-P., *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, McGill University lecture notes, Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1968. (邦訳：J.-P. セール (鈴木治郎訳),『楕円曲線と ℓ 進アーベル表現』, ピアソン・エデュケーション, 1999 年.)

[Se5] Serre, J.-P., *A course in arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics, No. 7. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. （邦訳：J.-P. セール （弥永健一訳）,『数論講義』, 岩波書店, 1979 年.）

[Se6] Serre, J.-P., *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures)*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, (1969/70), No. 19.

[Se7] Serre, J.-P., *Représentations ℓ-adiques*, Algebraic number theory (Kyoto Internat. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Univ. Kyoto, Kyoto, 1976), pp. 177–193. Japan Soc. Promotion Sci., Tokyo, 1977.

[Se8] Serre, J.-P., *Extensions icosaédriques*, Seminar on Number Theory, 1979–1980, Exp. No. 19, 7 pp., Univ. Bordeaux I, Talence, 1980.

[SBT] Shepherd-Barron, N. I., Taylor, R., mod 2 *and* mod 5 *icosahedral representations*, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997), no. 2, 283–298.

[Sh] Shimura, G., *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Reprint of the 1971 original. Publications of the Mathematical Society of Japan, 11. Kanô Memorial Lectures, 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.

[Tat] Tate, J., *Algebraic cycles and poles of zeta functions*, Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), 93–110.

[Tay1] Taylor, R., *Remarks on a conjecture of Fontaine and Mazur*, J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), no. 1, 125–143.

[Tay2] Taylor, R., *On the meromorphic continuation of degree two L-functions*, Doc. Math. 2006, Extra Vol., 729–779.

[Tay3] Taylor, R., *Galois representations*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), 449–474, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[Tay4] Taylor, R., *Automorphy for some ℓ-adic lifts of automorphic mod ℓ representations. II*, preprint, 2006 (`http://www.math.harvard.edu/~rtaylor/`).

[TW] Taylor, R., Wiles, A., *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 553–572.

[TY] Taylor, R., Yoshida, T., *Compatibility of local and global Langlands correspondences*, J. Amer. Math. Soc. 20 (2007), no. 2, 467–493.

[We] Weil, A., *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 55, (1949), 497–508.

[Wi] Wiles, A., *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 443–551.

[Yo] Yoshida, H., *On an analogue of the Sato conjecture*, Invent. math. 19 (1973), 261–277.

[EGA] Grothendieck, A., *Éléments de géométrie algébrique. I–IV*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 4 (1960), No. 8 (1961), No. 11 (1961), No. 17 (1963), No. 20 (1964), No. 24 (1965), No. 28 (1966), No. 32 (1967).

[SGA] *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie (SGA) 1–7 & $4\frac{1}{2}$*.
(Grothendieck Circle : `http://www.grothendieckcircle.org/`)

[Corvallis] *Automorphic forms, representations and L-functions* (Corvallis, Ore., 1977), Proc. Sympos. Pure Math., 33, Part 1 & 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[AnnArbor] *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, Vol. I & II (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., 10, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Seattle] *Motives* (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1 & Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Toronto] *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Tanoshimi] 数学のたのしみ,『佐藤-テイト予想の解決と展望』，日本評論社，2008 年（出版予定）