

期末試験（2014 年 1 月 27 日（月）実施）

- ノート・教科書・プリント等は持ち込み不可です.
- 原則として、講義の成績は**期末試験のみ**で評価します. ただし、講義中にレポートを提出した場合は、それを成績に加味する場合があります.
- 試験終了後に解答例を配布します.

問題 1 $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0, y \neq 0 \right\}$ とおく.

- (1) G は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せ.
- (2) G は $GL_2(\mathbb{R})$ の正規部分群であるかどうかを判定せよ.

問題 2 6 次対称群 S_6 の元のうち、 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ と共役なものの個数を求めよ.

問題 3 環 $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$ の乗法群（乗法に関する可逆元のなす群）を $(\mathbb{Z}/143\mathbb{Z})^\times$ とおく.

- (1) $(\mathbb{Z}/143\mathbb{Z})^\times$ の位数を求めよ. (ヒント: $143 = 11 \times 13$)
- (2) 準同型 $f: (\mathbb{Z}/143\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/143\mathbb{Z})^\times$ を $f(x) = x^2$ で定める. 像 $\text{Im } f$ の位数を求めよ.

問題 4 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{x + y\sqrt{-2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ を $\mathbb{C}$ の部分環とする. 写像 $N: \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \rightarrow \mathbb{Z}$ を $N(\alpha) = |\alpha|^2$ で定める. ここで、 $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$ は 2 乗すると -2 になる複素数を、 $|\alpha|$ は α の複素絶対値を表す.

- (1) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ のイデアルの等式 $(3 + \sqrt{-2}) = (11, 8 - \sqrt{-2})$ を示せ.
- (2) 写像 N に関して $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ はユークリッド整域であることを示せ. (ヒント: 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $\alpha \neq 0$ に対し、 $\beta = \gamma\alpha + \delta$ および $N(\delta) < N(\alpha)$ をみたす $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ が存在することを示せ.)

問題 5 $M = \{P(X) \in \mathbb{Z}[X] \mid \deg P(X) \leq 3\}$ を 3 次以下の $\mathbb{Z}$ 係数多項式のなす加法群とする. 準同型 $\varphi: M \rightarrow M$ を $\varphi(P(X)) = P'(X) + P''(X)$ で定める ($P'(X)$, $P''(X)$ は、 $P(X)$ の 1 階微分と 2 階微分を表す). $M/\text{Im } \varphi$ は有限生成アーベル群なので、

$$M/\text{Im } \varphi \cong \mathbb{Z}/p_1^{n_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_k^{n_k}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^r \quad (p_1, \dots, p_k \text{ は素数}, n_1, \dots, n_k \geq 1, r \geq 0)$$

という同型が存在する. $M/\text{Im } \varphi$ をこのような形に書け.

ボーナス問題 奇数 n であつて、 $n = x^2 + y^2$ (x, y は正整数, $x < y$) の形に **3 通り以上** に書けるものを 1 つ求めよ.