アインシュタイン方程式*

重力を方程式で記述する

1　ニュートン重力を超えて

重力は非常になじみのある力である．ものを投げると，地球の重力により落ちてくる．この地上の落体運動と太陽系の惑星や月の運動が，同じ一つの力で統一的に表されることをニュートン (I. Newton) が示した．質量を持つすべての物体間にはその距離の二乗に反比例して引力 (重力) が働くという有名な「**万有引力の法則**」である．この重力は保存力で，物体に働く重力加速度 $\mathbf{g}$ はニュートンポテンシャル Φ の勾配 ($\mathbf{g} = -\nabla\Phi$) により与えられる．そして力の逆二乗則は，ポテンシャル Φ に対するポアッソン方程式

$$\Delta\Phi \quad = \quad 4\pi G\rho \tag{1}$$

で記述される．ここで，Δ, Φ, G, ρ はそれぞれラプラス演算子，ニュートンの万有引力定数，重力源となる物体の質量密度である．このニュートンの重力理論は，様々な重力実験をよく説明し，また太陽系の天体などの観測とも矛盾しない完璧な理論と考えられた．

ところが，アインシュタイン (A.Einstein) が 1905 年に特殊相対性理論を提唱するや，ニュートン重力理論の立場が危うくなった．それは特殊相対性理論と相容れないからである．ニュートンの重力理論では，(1) 式のように基礎方程式に時間微分が含まれないので，物体の密度分布が与えられると，瞬時にそのポテンシャルが決定され，物体に働く重力も決まる．ところが，特殊相対性理論では，物体の速さや情報伝播速度に上限 (光速度) があり，それを超えてはいかなる情報も伝えられない．物体の密度分布が決まった瞬間に働く重力が決まるというのはこの事実に反するため，この 2 つの理論は矛盾するのである．

当然，物理学者たちは，特殊相対性理論と矛盾しない重力理論，相対論的重力理論を探し始めた．もちろんアインシュタインもその１人である．しか

*この文書は，サイエンス社「数理科学」2014 年 9 月号, pp. 8–14 に掲載された前田恵一氏による同タイトルの記事から抜粋・改編したものです．

しその方法は，ポアッソン方程式 (1) のラプラス演算子 (δ) を時間微分を含めたローレンツ不変なダランベール演算子

$$\Box \quad = \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$$

に置き換えればよいという単純なものではない．問題は，特殊相対性理論における質量とエネルギーの等価性に由来する．重力場 (Φ) もエネルギーを持ち，等価性から質量密度 ρ にも寄与するはずで，相対論化された方程式は必然的に Φ の非線型方程式になる．

その答えを見つけたのは，やはりアインシュタイン自身である．本人が「生涯で最もすばらしいアイデア」と語った「**等価原理**」および，その後に思いついた「**曲がった時空**」の考え方を元に，1915 年末に**一般相対性理論**を完成した.「等価原理」により重力のある系の物理を加速系の物理に置き換えることで，重力場中の赤方偏移・時間の遅れや光の屈折などを予言し，また回転円盤の思考実験から，誰も考えなかった「空間の歪み」のアイデアにたどり着く．これまでの物理学では，時間や空間はあくまで現象を記述するための便宜であって，物理的対象ではなかった．それが時空の歪みを重力場と捉え，時空そのものを物理学の対象に引き上げたのである．その意味で，アインシュタインのこの時空の物理学は，相対論的重力理論ではなく，一般相対性理論と呼ばれる．

2　アインシュタイン方程式

曲がった空間の数学的記述はリーマン (B. Riemann) が考え出したリーマン幾何学により可能であることを友人の数学者グロスマン (M. Grossmann) から教えてもらったアインシュタインは，相対論的重力理論の構築に取りかかる．リーマン幾何学では，曲がった N 次元空間を記述する線素 ds^2 は計量 g_{AB} により

$$ds^2 \quad := \quad g_{AB}dx^A dx^B$$

のようにはじめから与えられている．時空を考える場合は，ギリシャ文字の添え字 (μ, ν, ...) を用い，時間 ($\mu = 0$) と空間 ($\mu = 1, 2, 3$) の 4 次元時空多様体 [座標: x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)] とする．線素 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ は，時間座標を含むため正定値ではない．アインシュタインが考えた曲がった時空では，重力場は計量で表される．リーマン幾何学では計量は与えられたものであるが，相対論的重力理論を構築するには，計量を決定する方程式を見つける必要がある．それは，ニュートン重力理論では重力場 Φ はポアッソン方程式 (1) で決定され，それを相対論的に拡張するには (1) に対応する相対論的重力場 (計量) の方程式を探し出さなければならないからである．計量を決定する方程

式はリーマン幾何学にはなく，新たにそれを見つけるのにアインシュタインはさらに苦労する．

アインシュタインが悪戦苦闘しつつも見つけ出したその方程式の導出を，今日の考え方でまとめておこう．基本となる前提は次の 3 つである．

[1] **一般相対性原理**　任意の観測者に対して物理法則は不変，つまり法則を記述する基本方程式は一般座標変換に対して不変であるとする．その結果，法則はテンソル方程式で記述される．

[2] **エネルギー・運動量保存則**　系のエネルギーおよび運動量は保存されるとする．つまり，エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ に対して

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

が成り立つ．∇_ν は共変微分．

[3] **弱場近似でニュートン重力理論を再現**

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \quad &\to \quad \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \\ &\quad\ \ \eta_{\mu\nu} : \text{ミンコフスキー計量} \end{aligned}$$

の極限でポアッソン方程式 (1) が得られる．以上の仮定から**アインシュタイン方程式**として知られている次の相対論的重力方程式が得られる．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad = \quad 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2}$$

ここで $R_{\mu\nu}$, R はそれぞれリッチ曲率テンソル，スカラー曲率で，それらは

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} \quad &:= \quad \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha} \Gamma^\beta{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu}, \\ R \quad &:= \quad g_{\mu\nu} R_{\mu\nu} \end{aligned}$$

で定義される．また，接続 $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ は

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \quad := \quad \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right)$$

で与えられる．定義式からわかるように曲率は計量 $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分で記述され，計量が重力ポテンシャルを表していることを考えると，この式がニュートン重力理論の満たすべき方程式 (1) の拡張であることは容易に想像できる．実際，$g_{00} \approx -1 + 2\Phi$ $(\Phi \ll 1)$ と置くと (2) から (1) が導ける．アインシュタイン方程式 (2) は，変数が計量テンソル (独立成分は 10 個) の非線形偏微分方程式であることから，その解を求めることだけでも非常に困難で，その宇宙物理学への具体的応用は 1960 年代以降になる．