数理科学A 第三回レポート (2010年 12月10日修正版)

1. $f(x) = x^2 - 5x + 4$ とする．この時，次の問に答えよ．

   (1) $f(x) = 0$ を $x = g(x)$ の形に書き直し，$x_{n+1} = g(x_n)$ が収束するための十分条件を与えよ．

   (2) (1) で求めた十分条件をもとに，$x_{n+1} = g(x_n)$ が収束するための x の区間を定めよ．

2. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ とする．この時，次の問に答えよ．

   (1) $f(x) = 0$ に対する Newton 法を書け．

   (2) $x_0 = 2.5$ とするとき，Newton 法により $f(x) = 0$ の解 $x = \alpha$ の近似解 $\widetilde{\alpha}$ を求めよ．ただし，その収束判定条件を $|x_{k+1} - x_k| < 0.01$ とし，各ステップの計算結果は小数点以下第五位まで四捨五入して求めよ．

3. 非線形方程式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 - x + 4 \\ xy - 2x - 3y + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

   を考える．この時，次の問に答えよ．

   (1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ に対する Newton 法を書け．

   (2) $\boldsymbol{x}_0 = [1,1]^t$ とするとき，(1) の Newton 法の反復法により $\boldsymbol{x}_1$ を求めよ．

4. z を複素数 $z = x + \mathrm{i}y$ として，方程式 $z^2 + 1 = 0$ を実部と虚部にわけて，$z^2 + 1 = 0$ を解く二変数に対する Newton 法のスキームを導け．

5. $f(x)$ が $a \le x \le b$ 上の微分可能な関数で $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $0 < \alpha \le f'(x) \le \beta$ を満足しているものとする．このとき，$f(x) = 0$ の解を求めるために

$$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$$

   なる反復法を採用するには，λ をどのようにえらんだらよいか？

6. 　一変数の方程式 $f(x) = 0$ において，α がその σ 重根 $(\sigma \ge 2)$ あるとする．この時，Newton 法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

   において，α の近傍で

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{\sigma - 1}{\sigma}(x_k - \alpha) + O((x_k - \alpha)^2)$$

   が成立し，二次の収束をしないことを示せ．

本レポートの提出期限は 12月24日とする