6　初等関数 II

指数関数をはじめとする幾つかの初等関数を第 3 章で導入した。その続編として、本章では初等関数の基本性質を微分法を援用しつつ導いてゆく。

6.1　円周率と三角関数

円周率 $\pi = 3.14159...$ は幾何学的には (円周の長さ)/(直径) と定義され、これが円の大きさに依らない数であることは、既にユークリッドが「原論」の中で述べている。また、記号 π はオイラーが用いて以来普及した[33]。人類は長きにわたり、π の近似値を精密に求める為に様々な工夫を重ねてきた。現在では計算機により小数点以下 100 万桁までが計算される一方、π が無理数であること、更に、超越数であることも知られている[34]。

我々はここで改めて円周率を定義する。それは、次の命題を通じた解析的な流儀による。

命題 6.1.1 (円周率と三角関数の増減)

(a) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ を満たす実数 $\pi \in (0, 2\sqrt{3})$ が唯一つ存在する。この π を **円周率** と呼ぶ。

(b) $z \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\left(\cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right), \sin\left(z + \frac{n\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} (\cos z, \sin z), & n = 4m, \\ (-\sin z, \cos z), & n = 4m+1, \\ -(\cos z, \sin z), & n = 4m+2, \\ (\sin z, -\cos z), & n = 4m+3. \end{cases} \tag{6.1}$$

特に、cos, sin は共に周期 2π を持つ：

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z.$$

(c) cos, sin の区間 $[0, 2\pi]$ での増減は次の表の通り。

x	0	$\nearrow$	$\pi/2$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$3\pi/2$	$\nearrow$	2π
$\cos x$	1	狭義 $\searrow$	0	狭義 $\searrow$	-1	狭義 $\nearrow$	0	狭義 $\nearrow$	1
$\sin x$	0	狭義 $\nearrow$	1	狭義 $\searrow$	0	狭義 $\searrow$	-1	狭義 $\nearrow$	0

特に $x \in \mathbb{R}$ なら

$$(\cos x, \sin x) = (1, 0) \iff x \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

証明： (a): 段階を経て示す。

(1) $(0, \sqrt{6})$ 上 $\sin > 0$.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}_{a_n \text{ と置く}} \overset{\text{命題 } 2.5.9}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1}),$$

$$a_{2n} + a_{2n+1} = \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} = \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)}\right).$$

[33] 最初に用いたのは英国の数学者 William Jones (1675–1749) と言われている。

[34] 無理数であることは 1761 年、J. H. Lambert, 超越数であることは 1882 年、C. L. F. Lindeman による。

$x \in (0,\sqrt{6})$, $n \in \mathbb{N}$ なら

$$\frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)} < \frac{6}{2\cdot 3} = 1, \text{ 従って } a_{2n} + a_{2n+1} > 0.$$

以上より、$x \in (0,\sqrt{6})$ なら $\sin x > 0$.

(2) cos は $[0,\sqrt{6}]$ 上、狭義単調減少。

$(0,\sqrt{6})$ 上 $(\cos)' = -\sin < 0$. 故に微分による増減判定 (定理 5.4.6) から (2) を得る。

(3) $\cos 0 = 1$, $\cos\sqrt{3} < 0$.

$\cos 0 = 1$ は cos の定義から明らか。cos の巾級数展開より

$$1 - \cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!}}_{a_n \text{ とおく}} \overset{\text{命題 2.5.9}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n+1} + a_{2n+2})$$

$$a_{2n+1} + a_{2n+2} = \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{x^{4n+4}}{(4n+4)!} = \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)}\right)$$

所が、$|x| \le \sqrt{12}$ なら

$$\frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} \le \frac{12}{3\cdot 4} = 1, \text{ 従って、} a_{2n+1} + a_{2n+2} \ge 0.$$

故に、$|x| \le \sqrt{12}$ なら

$$1 - \cos x \ge a_1 + a_2 = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) \quad \text{特に} \quad 1 - \cos\sqrt{3} \ge \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8},$$

つまり $\cos\sqrt{3} \le -1/8 < 0$.

以上を用いて (a) を示す。(3), cos の連続性、及び中間値定理（定理 2.3.4）より $\exists c \in (0,\sqrt{3})$, $\cos c = 0$. 更に (2) よりこの c は唯一つ。以上より $2c$ が求めるもの。

(b): $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ かつ $\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$. 一方、$0 < \pi/2 < \sqrt{3} < \sqrt{6}$ と (1) より $\sin\pi/2 > 0$. 従って、$\left(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$. これと、加法定理 (問 3.2.2) より

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \sin z \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}, \quad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin z \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + \cos z \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}.$$

これで $n = 1$ に対する (6.1) が分かった。また、z を $z - \frac{\pi}{2}$ でおきかえれば $n = -1$ に対する (6.1) を得る。更に $n = \pm 1$ に対する (6.1) を繰り返し用いて一般の $n \in \mathbb{Z}$ に対する (6.1) を得る。

(c): (6.1) より、$[0,\pi/2]$ 上の増減から $[\frac{m\pi}{2}, \frac{(m+1)\pi}{2}]$ $(m = 1,2,3)$ での増減も判る。そこで $[0,\pi/2]$ 上の増減を調べる。cos については (2) で既知。また、$(0,\pi/2)$ 上 $\sin' = \cos > 0$. 故に微分による増減判定 (定理 5.4.6) から sin は $[0,\pi/2]$ 上、狭義単調増加。 □

我々は正弦・余弦関数を、指数関数を用いて解析的に定義した（命題 3.2.2)。一方、正弦・余弦関数の幾何学的意味は、単位円周上の点の座標を、座標軸との角度 (=弧長) を変数とした関数として表すことである。次の命題により、これらふたつの考え方が融合される：

命題 6.1.2 (**円周の径数づけ**)

(a) $t, s \in \mathbb{R}$ に対し

$$e^{\mathbf{i}t} = e^{\mathbf{i}s} \iff t - s \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

(b) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し $t \mapsto e^{\mathbf{i}t}$ は $[c, c + 2\pi)$ から $\mathbb{S}^1 \stackrel{\text{def.}}{=} \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ への全単射。

証明：(a): $e^{\mathbf{i}t} = e^{\mathbf{i}s} \stackrel{\text{指数法則}}{\iff} e^{\mathbf{i}(t-s)} = 1 \stackrel{\text{命題 6.1.1}}{\iff} t - s \in 2\pi\mathbb{Z}$.
(b): $\varphi(t) = e^{\mathbf{i}t}$ $(t \in \mathbb{R})$ とする。示すべき事は「$e^{\mathbf{i}c}\varphi$ が $[0, 2\pi)$ から $\mathbb{S}^1$ への全単射」と言い替えられる。所が $z \mapsto e^{\mathbf{i}c}z$ は $\mathbb{S}^1$ から $\mathbb{S}^1$ への全単射。従って、$c = 0$ の場合を示せば十分。そこで以下、 $c = 0$ とする。このとき、単射性は (a) で既知だから全射性を言えばよい。また、命題 6.1.1 より $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ だから、結局次を言えばよい：

(1) $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1$ は全射、つまり $\forall z \in \mathbb{S}^1, \exists c \in [0, 2\pi], z = e^{\mathbf{i}c}$.

$z \in \mathbb{S}^1$ に対し $\operatorname{Re} z \in [-1, 1]$. $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$, $\cos \pi = -1$ と中間値定理 (定理 2.3.4) より

$$\exists c_+ \in [0, \pi],\ \ \exists c_- \in [\pi, 2\pi],\ \ \cos c_+ = \cos c_- = \operatorname{Re} z.$$

このとき、命題 6.1.1 の増減表より $\sin c_+ \geq 0 \geq \sin c_-$. そこで $\operatorname{Im} z \geq 0$ のとき、

$$\operatorname{Im} z = \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 c_+} = \sin c_+.$$

従って

$$z = \operatorname{Re} z + \mathbf{i} \operatorname{Im} z = \cos c_+ + \mathbf{i} \sin c_+ = e^{\mathbf{i}c_+}.$$

$\operatorname{Im} z \leq 0$ のときも同様にして $z = e^{\mathbf{i}c_-}$. 以上で (1) が言えた。 □

実数値関数としての指数関数は $\mathbb{R}$ から $(0, \infty)$ への全単射だった（命題 3.1.3）。命題 6.1.2 を用いると、複素数値関数としての指数関数が帯状領域 $\mathbb{R} \times [c, c + 2\pi)$ $(c \in \mathbb{R}$ は任意) から $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ への全単射であることが分かる：

系 6.1.3 **(a)** $z, w \in \mathbb{C}$ に対し

$$e^z = e^w \iff z - w \in 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}.$$

(b) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し $z \mapsto e^z$ は $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Im} z \in [c, c + 2\pi)\}$ から $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ への全単射。

証明：(a) $e^z = e^w \stackrel{\text{指数法則}}{\iff} e^{z-w} = 1$. そこで、$z - w$ を改めて z と書くことにより $w = 0$ の場合に帰着する。
$\Longrightarrow$: $e^z = 1$ なら $e^{\operatorname{Re} z} \stackrel{\text{命題 3.4.1}}{=} |e^z| = 1$, よって $\operatorname{Re} z = 0$ （命題 3.1.3 より $x \mapsto e^x$ は $\mathbb{R}$ 上、全単射であることに注意). また $\operatorname{Re} z = 0$, $e^z = 1$ から、$e^{\mathbf{i} \operatorname{Im} z} = 1$. 故に命題 6.1.2(a) より $\operatorname{Im} z \in 2\pi\mathbb{Z}$. 以上より $z = \underbrace{\operatorname{Re} z}_{=0} + \mathbf{i} \operatorname{Im} z \in 2\mathbf{i}\pi\mathbb{Z}$.
$\Longleftarrow$：命題 6.1.2(a) による。
(b): 単射性は (a) による。全射性を示すため、$w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ を任意とする。$w/|w| \in \mathbb{S}^1$ と命題 6.1.2 より $\exists t \in [c, c + 2\pi)$, $w/|w| = e^{\mathbf{i}t}$. 従って、$w = |w|e^{\mathbf{i}t} = e^{\log |w| + \mathbf{i}t}$. □

問 6.1.1 (**双曲・三角関数の零点**) $z \in \mathbb{C}$ に対し以下を示せ:「$\mathrm{ch}\, z = 0 \iff z \in \frac{\pi \mathbf{i}}{2} + \pi \mathbf{i}\mathbb{Z}$」,「$\cos z = 0 \iff z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$」,「$\mathrm{sh}\, z = 0 \iff z \in \pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$」,「$\sin z = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}$」.

問 6.1.2 $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ $(t \geq 0)$ とする。$0 < t < \pi$ を任意に固定するとき、以下を示せ:(i) $f(t) \in C_t \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |x - (t, 1)| = 1\}$. (ii) C_π と半直線 $\{x \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x_1 \leq \pi, \ \ x_2 = 1 - \cos t\}$ の交点 $g(t)$ に対し $f'(t), f(\pi) - g(t)$ は平行である。
ガリレオ ガリレイは 問 6.1.2 の f を**サイクロイド**と名付けた[35]。円周 C_0 上にある原点 $(0, 0)$ に印をつけ、C_0 を x_1 軸の正の方向へ速度 1 で転がすとき、その印の時刻 t での位置が $f(t)$ である。(ii) は、曲線上の点 $f(t)$ での接線の傾きを幾何学的に与える(1638 年、フェルマーによる発見)。サイクロイドは微積分学だけでなく、力学では最速降下曲線や等時曲線、また建築では橋梁の形として知られている。

問 6.1.3 $(\star)$ $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\omega = \exp(2\pi\mathbf{i}/p)$ とするとき、$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{np}}{(np)!} = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \exp(\omega^j x)$ を示せ。ヒント:$\sum_{j=0}^{p-1} \omega^{nj}$ は n が p の倍数のとき $= p$, それ以外は $= 0$.

次の例は、複素関数論でよく知られた事実の初等的証明である。

例 6.1.4 $(\star)$ $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, g は $a \in \mathbb{C}$ で連続、$f(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$, $f(z) = f(a) + (z - a)^m g(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ とする。このとき a は $|f|$ の極値点でない。

証明: $f(a)/g(a) = re^{\mathbf{i}\theta}$, $(r > 0, \theta \in \mathbb{R})$ とする。まず a が $|f|$ の極小点でないことを示すため、$h = \delta^{1/m} e^{\mathbf{i}(\theta+\pi)/m}$ $(0 < \delta \leq r)$ とすると、

$$|\underbrace{f(a)}_{=g(a)re^{\mathbf{i}\theta}} + \underbrace{g(a)h^m}_{=-g(a)\delta e^{\mathbf{i}\theta}}| = |g(a)|(r - \delta) = |f(a)| - |g(a)h^m|.$$

また、仮定より δ が十分小さければ $|g(a + h) - g(a)| < |g(a)|$. よって

$$|f(a + h)| \leq \underbrace{|f(a) + g(a)h^m|}_{=|f(a)|-|g(a)h^m|} + \underbrace{|h^m(g(a + h) - g(a))|}_{<|g(a)h^m|} < |f(a)|.$$

δ を小さくとることにより $a + h$ はいくらでも a に近くとれるから、a は $|f|$ の極小点でない。a が $|f|$ の極大点でないことも同様に示すことができる(問 6.1.4)。 $\square$

問 6.1.4 $(\star)$ 例 6.1.4 で、a が $|f|$ の極大点でないことを示せ。

問 6.1.5 $(\star)$ 定数でない多項式 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対し $f(a) = 0$ となる $a \in \mathbb{C}$ が存在すること (**代数学の基本定理**) を示せ。ヒント:粗筋は次の通り。$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, よって $|f|$ はある $a \in \mathbb{C}$ で最小となる(問 5.5.11)。この a について例 6.1.4 を用い $f(a) = 0$.

命題 6.1.5 (**正接関数**) 次の関数 tan を **正接** (tangent) 関数と呼ぶ:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$$

(問 6.1.1 より上の z に対し $\cos z \neq 0$)。このとき、

(a) $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ 上 $\tan' = 1/\cos^2 > 0$. 特に tan は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上狭義単調増加。

[35] Galileo Galilei (1564–1642)

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \tan x = \pm\infty$, (複合同順).

証明：(a):

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' \overset{商の微分}{=} \frac{\overbrace{\sin'}^{\cos}\cdot\cos - \sin\cdot\overbrace{\cos'}^{-\sin}}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

特に、 $\tan' > 0$ なので微分による増減判定（定理 5.4.6）より $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上狭義単調増加。
(b): 命題 6.1.1 の増減表による。 □

問 6.1.6 $x, y, x+y \in \mathbb{C}\backslash(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$ のとき、$\tan x\tan y \neq 1$, $\tan(x+y) = \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ を示せ。

問 6.1.7 $a > 0$, $f(t) = e^{at}(\cos t, \sin t)$ $(t \in \mathbb{R})$ とする。$a = \tan\theta$ をみたす $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ に対し $\frac{f\cdot f'}{|f||f'|} \equiv \cos\theta$ を示せ。f は**対数螺旋**と呼ばれる曲線で、自然界には、オウム貝やアンモナイトの渦巻き模様として現れる。この問から、渦の中心 (原点) と渦上の点を結ぶ直線と、その点での接線が常に一定角 θ をなすことが分かる。

問 6.1.8 次の関数 th を **双曲正接** (hyperbolic tangent) 関数 と呼ぶ:

$$\mathrm{th}\ z = \frac{\mathrm{sh}\ z}{\mathrm{ch}\ z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\left(\frac{\pi\mathbf{i}}{2} + \pi\mathbf{i}\mathbb{Z}\right)$$

(問 6.1.1 より、上の z に対し $\mathrm{ch}\ z \neq 0$)。以下を示せ：(i) $x \in \mathbb{R}$ なら $(\mathrm{th}\ x)' = 1/\mathrm{ch}^2 x$. 特に th は $\mathbb{R}$ 上狭義単調増加。(ii) $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}\ x = \pm 1$, (複合同順).

問 6.1.9 次を示せ：$\frac{1}{\mathrm{th}\ z} = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2}$, $\frac{1}{\mathrm{sh}\ z} = \frac{1}{\mathrm{th}\ (z/2)} - \frac{1}{\mathrm{th}\ z}$, $\mathrm{th}\ z = \frac{2}{\mathrm{th}\ 2z} - \frac{1}{\mathrm{th}\ z}$.

問 6.1.10 双曲正接関数 $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to (-1,1)$ に対しその逆関数 $\mathrm{th}^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ を考える。$y \in (-1,1)$ に対し以下を示せ：(i) $\mathrm{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. (ii) $(\mathrm{th}^{-1})'(y) = \frac{1}{1-y^2}$. (iii) $|y| < 1$ なら $\mathrm{th}^{-1}(y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$.

問 6.1.11 ($\star$) $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$ を $e^r = 1 + 2r$ の解とする。問 3.3.5, 問 6.1.9 の結果を用い、以下を示せ[36]: (i) $0 < |z| < r$ に対し $\frac{1}{\mathrm{th}\ z} = \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}B_n z^{2n-1}}{(2n)!}$. (ii) $0 < |z| < r$ に対し $\frac{1}{\mathrm{sh}\ z} = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n(2^{2n-1}-1)B_n z^{2n-1}}{(2n)!}$. (iii) $0 < |z| < r/2$ に対し $\mathrm{th}\ z = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_n z^{2n-1}}{(2n)!}$.
注： $\sin z = \frac{1}{\mathbf{i}}\mathrm{sh}\ (\mathbf{i}z)$, $\tan z = \frac{1}{\mathbf{i}}\mathrm{th}\ (\mathbf{i}z)$ から $\frac{1}{\tan}$, $\frac{1}{\sin}$, $\tan$ についても問 6.1.11 と同様の級数表示が得られる。

6.2 一般二項定理

$\alpha \in \mathbb{C}$,$n \in \mathbb{N}$ に対し (一般) 二項係数 $\binom{\alpha}{n}$ を次で定めた：$\binom{\alpha}{0} = 1$, また、$n \geq 1$ なら $\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!$ （問 2.4.5 参照）.

命題 6.2.1 (**一般二項定理**) $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in (-1,1)$ に対し $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$ (絶対収束).

[36] 問 3.3.5 の脚注で述べた理由より、この問の式は r を 2π でおきかえても正しい。

証明：示すべき等式の右辺（$f(x)$ とおく）は絶対収束する（問 2.5.6 ）。以下、左辺（$g(x)$ とおく）との一致を言う。巾関数の微分（例 5.1.11） より

(1) $g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, 従って $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$.

また、

(2) $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$.

実際、

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &\overset{\text{例 }5.1.7}{=} (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}nx^{n-1} \overset{\text{簡単な書き換え}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\binom{\alpha}{n+1}(n+1)+\binom{\alpha}{n}n\right\}x^n \\ &\overset{\text{問 }2.4.5}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha f(x).\end{aligned}$$

(1), (2) より $f'g = g'f$. これをを用い、$(-1,1)$ 上 $f = g$ を示す。$\forall z \in \mathbb{C}$ に対し $e^z \neq 0$ なので $g(x) = \exp(\alpha \log(1+x)) \neq 0$. 以上より $f/g \in D^1((-1,1))$ かつ

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = 0.$$

従って $(-1,1)$ 上 $f/g = c$ (定数)。所が $c = (f/g)(0) = 1/1 = 1$. $\square$

ニュートンは、遅くとも 1665 年には一般二項定理が α が有理数の場合に成立することを発見していた。しかし、ニュートンは右辺の収束は気にかけていなかったらしく、最初の何項かを具体的に書いた後、残りの（無限個の）項は "+etc." と誤魔化して（?）いる。

問 6.2.1 $x \in (-1,1)$, $m \in \mathbb{N}$ に対し $\frac{1}{(1+x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{m+n-1}{n}x^n$ (右辺は絶対収束) を示せ。

例 6.2.2 ($(\mathbf{1+x})^{\pm 1/2}$ **の巾級数**) $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ に対し、**2 重階乗** (double factorial) を次のように定める：

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1), \quad (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n).$$

また、便宜上 $(-1)!! = 0!! = 1$ とする。$n \in \mathbb{N}$ とするとき、以下は容易に分かる：

$$\begin{aligned} a_n &\overset{\text{def.}}{=} (-1)^{n-1}\binom{1/2}{n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n-1}{n}, \quad n \geq 1, \\ b_n &\overset{\text{def.}}{=} (-1)^n\binom{-1/2}{n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

上記 (a_n), (b_n) と $x \in (-1,1)$ に対し一般二項定理（命題 6.2.1）より、

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n x^n, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n x^n.$$

問 6.2.2 双曲正弦 $\mathrm{sh}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ の逆関数 $\mathrm{sh}^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ について以下を示せ：
(i) $\mathrm{sh}^{-1}(y) = \log(y + \sqrt{1+y^2})$. (ii)$(\mathrm{sh}^{-1})'(y) = 1/\sqrt{1+y^2}$. (iii) $y \in (-1,1)$ なら $\mathrm{sh}^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$ (但し b_n は 例 6.2.2 と同じ）.

6.3 逆関数の微分

狭義単調関数の逆関数定理（命題 2.3.5）より、連続な狭義単調増加関数 f の逆関数 f^{-1} は連続な狭義単調増加関数だった。実は、f が可微分なら、f^{-1} も可微分であり、$(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$ が成立する。これは、逆関数の意味をグラフで考えるとごく自然である。

定理 6.3.1 (**逆関数の微分**) $I \subset \mathbb{R}$ を区間、I からその端点（もし I に含まれれば）を除いた区間を $\mathring{I}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(I) \cap D^m(\mathring{I})$ $(m \geq 1)$, $\mathring{I}$ 上 $f' > 0$ とする。このとき、

(a) f は I 上狭義単調増加。また $J = f(I)$ とするとき、J は区間、逆関数 $f^{-1} : J \longrightarrow I$ は連続かつ狭義単調増加。

(b) J からその端点（もし J に含まれれば）を除いた区間を $\mathring{J}$ とする。このとき、$f^{-1} \in C(J) \cap D^m(\mathring{J})$ かつ

$$\mathring{J} \text{ 上 } f' \circ f^{-1} > 0, \quad (f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1}). \tag{6.2}$$

(c) $m \geq 1$, $f \in C(I) \cap C^m(\mathring{I})$ なら $f^{-1} \in C(J) \cap C^m(\mathring{J})$.

証明: (a): 微分による増減判定 (定理 5.4.6) より f は I 上狭義単調増加。従って狭義単調関数の逆関数定理 (命題 2.3.5) より逆関数 $f^{-1} : J \longrightarrow I$ は連続かつ狭義単調増加。
(b): 先ず

(1) $f^{-1} \in D^1(\mathring{J})$ と (6.2) の成立

を示す。f^{-1} の狭義単調性より $y \in \mathring{J}$ なら $f^{-1}(y) \in \mathring{I}$. 故に仮定より $f'(f^{-1}(y)) > 0$. 今、$z \neq y$, $z \longrightarrow y$ とすると、$f^{-1}(z) \neq f^{-1}(y)$, $f^{-1}(z) \longrightarrow f^{-1}(y)$. 従って

$$\frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y)}{z - y} = \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y)}{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(y))} \longrightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

これで (1) が判った。次に

(2) $f^{-1} \in D^m(\mathring{J})$

を m に関する帰納法で示す。$m = 1$ の場合は (1) で示した。そこで $m \geq 2$ かつ $f^{-1} \in D^{m-1}(\mathring{J})$ を仮定する。$f' \in D^{m-1}(\mathring{I})$ なので合成関数の高階微分可能性 (命題 5.2.4) より

$$f' \circ f^{-1} \in D^{m-1}(\mathring{J}).$$

更に $\mathring{J}$ 上 $f' \circ f^{-1} > 0$ なので商の高階微分可能性 (命題 5.2.3) より

$$(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1}) \in D^{m-1}(\mathring{J}).$$

これは $f^{-1} \in D^m(\mathring{J})$ を意味する。
(c): (b) の証明と同様。 □

注： 定理 6.3.1 は、f^{-1} が $y \in \mathring{J}$ で可微分かつ $f' \circ f^{-1}(y) > 0$ を保証する。これを認めれば、(6.2) 第 2 式を連鎖律によっても導ける。即ち $f \circ f^{-1}(y) = y$ の両辺を微分すると、連鎖律より $(f' \circ f^{-1})(f^{-1})' = 1$ となり、(6.2) 第 2 式を得る。

6.4 逆三角関数

正弦・余弦関数の幾何学的意味は、単位円周上の点の座標を、座標軸との角度 (=弧長) を変数とした関数として表すことである。例えば、正弦関数は弧長 θ に対し円周上の点の y 座標（正弦）を対応させる関数だが、これは $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で全単射だから、この範囲では逆に、円周上の点の y 座標（正弦）に弧長（arc length）を対応させる関数を考えることが出来る。それが逆正弦関数（Arcsin ）である：

命題 6.4.1 (**逆正弦関数**) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ は連続な全単射、狭義単調増加 (命題 6.1.1)。そこで、その逆関数を**逆正弦関数**と呼び、Arcsin と記す。このとき、狭義単調関数の逆関数定理（命題 2.3.5）より $\mathrm{Arcsin} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ は連続な全単射、狭義単調増加である。更に、

(a) $y \in (-1,1)$ なら $(\mathrm{Arcsin}\, y)' = 1/\sqrt{1-y^2}$.

(b) $y \in [-1,1]$ なら $\mathrm{Arcsin}\, y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n y^{2n+1}}{2n+1}$, 但し $b_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

証明：(a): $\mathrm{Arcsin}\, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ より $\cos(\mathrm{Arcsin}\, y) \geq 0$. 従って

$$(\sin)'(\mathrm{Arcsin}\, y) = \cos(\mathrm{Arcsin}\, y) = \sqrt{1-\sin^2(\mathrm{Arcsin}\, y)} = \sqrt{1-y^2}$$

$y \in (-1,1)$ なら逆関数の微分（定理 6.3.1）より

$$(\mathrm{Arcsin}\, y)' = \frac{1}{(\sin)'(\mathrm{Arcsin}\, y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(b): <u>まず $y \in (-1,1)$ とする</u>。一般二項定理の応用例（例 6.2.2）で見たように、

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+y}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n y^n$, (右辺は絶対収束)。

(1) 右辺の絶対収束から、示すべき式右辺の絶対収束も分かるので、それを $f(y)$ と置く。巾級数の微分（例 5.1.7）より

(2) $f \in D^1((-1,1))$ かつ $f'(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^{2n}$.

故に $y \in (-1,1)$ なら

$$(\mathrm{Arcsin}\, y)' \overset{\text{(a)}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^{2n} \overset{(2)}{=} f'(y).$$

以上と微分による増減判定（定理 5.4.6）より $(-1,1)$ 上 $\mathrm{Arcsin} - f = c$ (定数). 更に $0 = \mathrm{Arcsin}\, 0 - f(0) = 0$.
<u>次に $y = \pm 1$ を考える</u>。示すべき式の両辺は y について奇関数だから、$y = 1$ で言えればよい。$y \in (-1,1)$ に対する結果と 問 4.3.1 より $y = 1$ に対する結果を得る。 □

注：双曲正弦関数 $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し 命題 6.4.1 と同様の結果を問 6.2.2(ii),(iii) で述べた。問 6.2.2(ii),(iii) を 命題 6.4.1 の方法で示すことも可能。

問 6.4.1 (**逆余弦関数**) cos : $[0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ は連続な全単射、狭義単調減少 (命題 6.1.1)。そこで、その逆関数を**逆余弦関数**と呼び、 Arccos と記す。このとき、狭義単調関数の逆関数定理（命題 2.3.5）より Arccos $:[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ は連続な全単射、狭義単調減少である。$y \in [-1,1]$ に対し $\mathrm{Arcsin}\, y + \mathrm{Arccos}\, y = \frac{\pi}{2}$ を示せ。この式により、 Arccos に関する性質は全て Arcsin のそれらに帰着する。

問 6.4.2 $a \in \mathbb{C}$, $T_a(x) = \cos(a\mathrm{Arccos}\, x)$ $(x \in [-1,1])$ とおく。以下を示せ：
(i) $(1-x^2)T_a''(x) - xT_a'(x) + a^2T_a(x) = 0$. (ii) $n \in \mathbb{N}$ なら T_n は n 次多項式であり、$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, $T_n(-x) = (-1)^nT_n(x)$ を満たす。T_n を**チェビシェフ多項式**という[37]。

命題 6.4.2 (**逆正接関数**) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ は連続な全単射、狭義単調増加 (命題 6.1.5)。そこで、その逆関数を**逆正接**関数と呼び、 Arctan と記す。このとき、狭義単調関数の逆関数定理（命題 2.3.5）より Arctan $:\mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ は連続な全単射、狭義単調増加。従って $\lim_{y\to\pm\infty} \mathrm{Arctan}\, x = \pm\dfrac{\pi}{2}$, (複合同順). 更に、

(a) $y \in \mathbb{R}$ なら $(\mathrm{Arctan}\, y)' = \dfrac{1}{1+y^2}$.

(b) $y \in [-1,+1]$ なら $\mathrm{Arctan}\, y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{2n+1}$.

証明：(a): $y \in \mathbb{R}$ なら

$$(\tan)'(\mathrm{Arctan}\, y) = 1/\cos^2(\mathrm{Arctan}\, y) \overset{\text{簡単な書き換え}}{=} 1 + \tan^2(\mathrm{Arctan}\, y) = 1 + y^2.$$

従って逆関数の微分（定理 6.3.1）より

$$(\mathrm{Arctan}\, y)' = \frac{1}{(\tan)'(\mathrm{Arctan}\, y)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

(b): $y = \pm 1$ での証明は別の機会に譲り、$y \in (-1,1)$ のみ考える。このとき、示すべき等式右辺は絶対収束するので、それを $f(y)$ とおく。巾級数の微分（例 5.1.7）より

(1) $f \in D^1((-1,1))$ かつ $y \in (-1,1)$ なら $f'(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n}$.

故に $y \in (-1,1)$ なら

$$(\mathrm{Arctan}\, y)' \overset{(a)}{=} \frac{1}{1+y^2} \overset{\text{指数級数}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n} \overset{(1)}{=} f'(y).$$

以上と微分による増減判定（定理 5.4.6）より $(-1,1)$ 上 $\mathrm{Arctan} - f = c$ (定数)。所が $c = \mathrm{Arctan}\, 0 - f(0) = 0$. □

注：双曲正接関数 th $:\mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ に対し 命題 6.4.2 と同様の結果を問 6.1.10 (ii),(iii) で述べた。問 6.1.10 (ii),(iii) を 命題 6.4.2 の方法で示すことも可能である。

問 6.4.3 以下を示せ：(i) $x > 0$ に対し、$\frac{\pi}{2} = 2\mathrm{Arctan}\, x - \mathrm{Arctan}\, \frac{x^2-1}{2x}$.
(ii) ($\star$) $\tan(\pi/16) < x < \tan(3\pi/16)$ なら、$\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{x^4+4x^3-6x^2-4x+1}{x^4-4x^3-6x^2+4x+1}$.
(ii) より $\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctan}\, \frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{239}$. 右辺の Arctan を命題 6.4.2 の巾級数で表したとき、その収束は速い。従って、それら巾級数の部分和は π の良い近似値を与える。

---

[37]Pafnutiĭ L'vovich Chebyshev,1821–94.

6.5 ($\star$) 対数の主値

命題 6.5.1 （**対数の主値**）$z \mapsto e^z$ は $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\, z \in (-\pi, \pi)\}$ 上 $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ への全単射。この逆関数を **対数の主値** と呼び Log と記す。このとき、

(a1) $z \mapsto \mathrm{Log}\, z$ は $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ 上 $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\, z \in (-\pi, \pi)\}$ への全単射,

(a2) $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ なら $e^{\mathrm{Log}\, z} = z$.

(a3) $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\, z \in (-\pi, \pi)$ なら $\mathrm{Log}\,(e^z) = z$,

(a4) $z = |z|e^{\mathbf{i}\theta} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ なら $\mathrm{Log}\, z = \log|z| + \mathbf{i}\theta$.

(b) $z \mapsto \mathrm{Log}\, z$ は $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ 上連続。

証明：(a0): 系 6.1.3 より $z \mapsto e^z$ は $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\, z \in [-\pi, \pi)\}$ 上 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ への全単射。また、直線 ：$\mathrm{Im}\, z = -\pi$ の像は $(-\infty, 0)$. 従って所期の全単射性が判る。
(a1)–(a3): (a0) の帰結。
(a4): (a3) の言い替え。
(b): $\theta : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \longrightarrow (-\pi, \pi)$ を次で定義[38]：$z = x + \mathbf{i}y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対し

$$\theta(z) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\,\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, \\ \pi/2 + \mathrm{Arctan}\,\left|\frac{x}{y}\right|, & x \leq 0, y > 0, \\ -\pi/2 - \mathrm{Arctan}\,\left|\frac{x}{y}\right|, & x \leq 0, y < 0. \end{cases}$$

このとき、以下は容易に確かめられる (問 6.5.1, 問 6.5.2)：

(1) $e^{\mathbf{i}\theta(z)} = z/|z|$,

(2) $\theta \in C(\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0])$.

(1), (a4) より $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ に対し

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + \mathbf{i}\theta(z).$$

上式と (2) より所期連続性を得る。 □

注：系 6.1.3 より、$z \mapsto e^z$ は $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\, z \in [-\pi, \pi)\}$ 上 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ への全単射。従って、逆写像は $(-\infty, 0)$ 上でも定義可能ではあるが、$(-\infty, 0]$ 上では連続にならない。この理由から $(-\infty, 0]$ は Log の定義域から除く。

問 6.5.1 命題 6.5.1 証明中の (1) を示せ。

問 6.5.2 命題 6.5.1 証明中の (2) を示せ。

問 6.5.3 $\alpha, z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ とする。$\exp(\alpha \mathrm{Log}\,(1 + z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ (絶対収束) を示せ。

[38] $\theta(z)$ は、z と正の実軸との角度を $(-\pi, \pi)$ で表したもの。従って、(1), (2) はごく自然。

例 6.5.2 逆三角関数を、対数の主値を用いて表示出来る。例えば $x \in [-1, 1]$ に対し

$$\mathrm{Arcsin}\, x = \frac{1}{\mathbf{i}} \mathrm{Log}\, (\sqrt{1-x^2} + \mathbf{i}x).$$

証明： $\mathrm{Arcsin}\, x \in [-\pi/2, \pi/2]$ より $\cos(\mathrm{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-x^2}$. 従って

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{i}\mathrm{Arcsin}\, x} &= \cos(\mathrm{Arcsin}\, x) + \mathbf{i} \sin(\mathrm{Arcsin}\, x) \\ &= \sqrt{1-x^2} + \mathbf{i}x \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]. \end{aligned}$$

上式両辺の Log をとれば結論を得る（命題 6.5.1(a4)）。 □

問 6.5.4 $x \in \mathbb{R}$ に対し次を示せ：$\mathrm{Arctan}\, x = \frac{1}{2\mathbf{i}} \mathrm{Log}\, \left(\frac{1+\mathbf{i}x}{1-\mathbf{i}x}\right)$.

例 5.4.8 は次のように一般化出来る：

命題 6.5.3 $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ なら $\mathrm{Log}\, (1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ (右辺は絶対収束).

証明： $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + \mathbf{i}y$, $|z| < 1$,

$$f(z) = \mathrm{Log}\, (1+z), \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$$

とする。命題 6.5.1 (a4) より

$$f(z) = \tfrac{1}{2} \log((1+x)^2 + y^2) + \mathbf{i}\mathrm{Arctan}\, \frac{y}{1+x}.$$

これを用いた直接計算（問 6.5.5）より、

(1)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{1}{1+z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{\mathbf{i}}{1+z}.$$

今、$|z| < 1$ なら $g(z)$ は絶対収束。故に

(2)
$$\frac{\partial g}{\partial x}(z) \underbrace{=}_{\text{例 5.2.5}} \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{n-1} = \frac{1}{1+z} \underbrace{=}_{(1)} \frac{\partial f}{\partial x}(z).$$

同じく $|z| < 1$ で

(3)
$$\frac{\partial g}{\partial y}(z) \underbrace{=}_{\text{例 5.2.5}} \mathbf{i} \frac{\partial g}{\partial x}(z) \underbrace{=}_{(2)} \frac{\mathbf{i}}{1+z} \underbrace{=}_{(1)} \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

故に、$|z| < 1$ の範囲で $f(z) - g(z) = c$ (定数)。所が $z = 0$ で $c = f(0) - g(0) = 0$ □

問 6.5.5 命題 6.5.3 証明中、(1) を確かめよ。