統計入門 第12回
検定・推定と標本規模 − t 検定

京都大学 国際高等教育院

附属データ科学イノベーション教育研究センター

中野 直人

nakano.naoto.6c@kyoto-u.ac.jp

目次

第一種、第二種過誤と標本サイズ

独立性の検定の考え方

- クロス表の「現実」と「理想」の差が非独立性の大きさ
  - 実際のクロス表

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	8	2	10
その他	11	14	25
計	19	16	35

  - 独立と仮定した場合に期待されるクロス表

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	5.43	4.57	10
その他	13.57	11.43	25
計	19	16	35

差が十分大きいなら
独立ではなさそう

独立性の検定の考え方

- **クロス表の差を「カイ二乗値 (χ^2)」ではかる**
  - χ^2**値：期待される値と実際の値の差**

$$\chi^2 = \frac{(8-5.43)^2}{5.43} + \frac{(2-4.57)^2}{4.57} + \frac{(11-13.57)^2}{13.57} + \frac{(14-11.43)^2}{11.43} = 3.7$$

  - **差が大きいほど独立ではないと判断**

実家 ＼ たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	8	2	10
その他	11	14	25
計	19	16	35

実家 ＼ たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	5.43	4.57	10
その他	13.57	11.43	25
計	19	16	35

χ^2値と標本サイズ

- **各セルの標本サイズが倍になるとχ^2値も倍に**
  - **観測度数表は倍になると期待度数表も倍になる**

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	16	4	20
その他	22	28	50
計	38	32	70

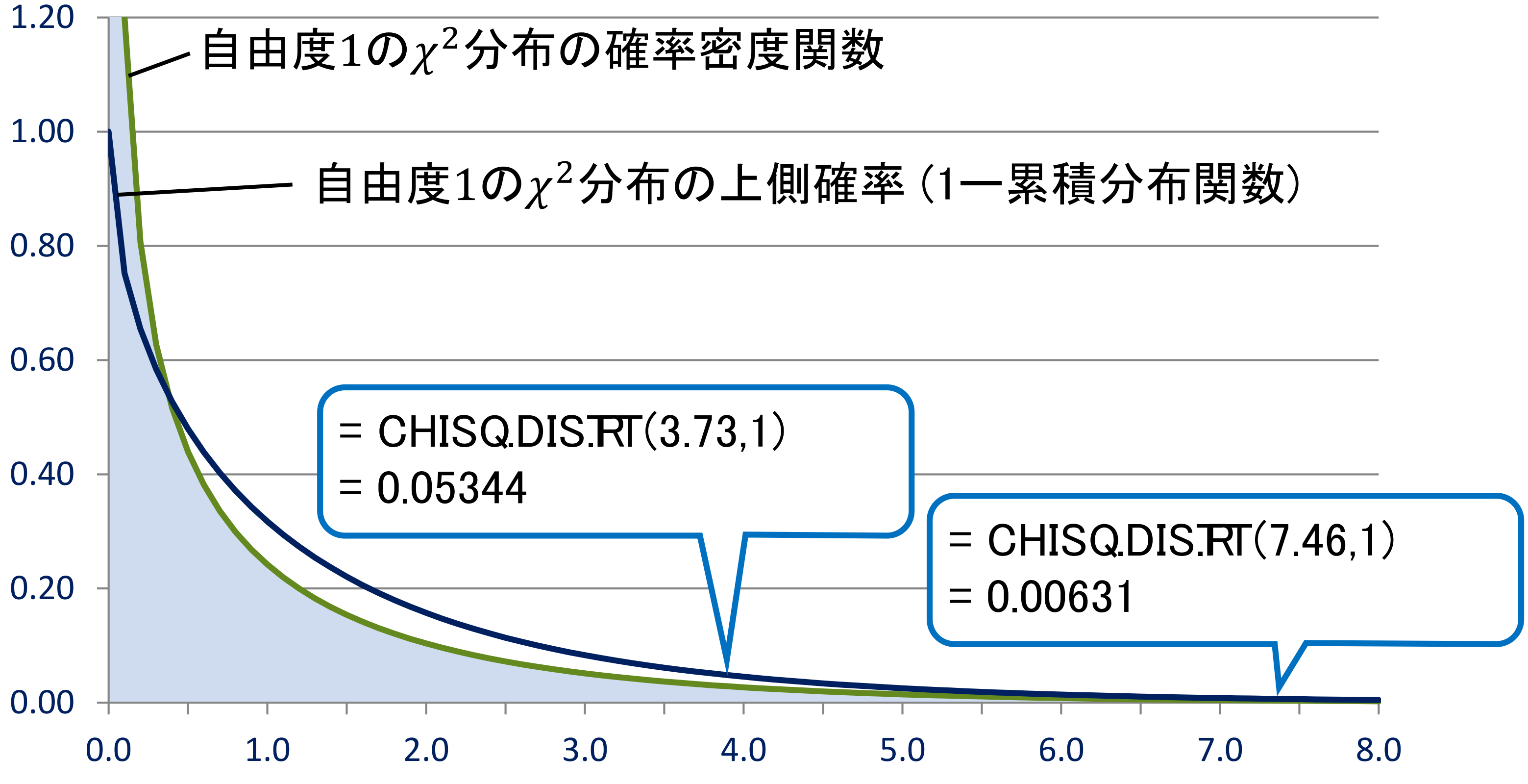
実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	10.86	9.14	20
その他	27.14	22.86	50
計	38	32	70

$$\chi^2 = \frac{(2\times 8 - 2\times 5.43)^2}{2\times 5.43} + \frac{(2\times 2 - 2\times 4.57)^2}{2\times 4.57}$$

$$+ \frac{(2\times 11 - 2\times 13.57)^2}{2\times 13.57} + \frac{(2\times 14 - 2\times 11.43)^2}{2\times 11.43} = 2\times 3.73$$

χ^2値と標本サイズ

- χ^2値が倍になると上側確率も一気に小さくなる



フィッシャーの直接確率と標本サイズ

- 各セルの標本サイズが倍になると確率は小さくなる
  - 「大阪人」で「たこ焼き器有り」の人が8人以上となる確率

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	8	2	10
その他	11	14	25
計	19	16	35

$$Pr(X \geq 8) = \sum_{i=8}^{10} \frac{\binom{10}{i}\binom{35-10}{19-i}}{\binom{35}{19}}$$
$$= 0.05796$$

  - 「大阪人」で「たこ焼き器有り」の人が16人以上となる確率

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	16	4	20
その他	22	28	50
計	38	32	70

$$Pr(X \geq 16) = \sum_{i=16}^{20} \frac{\binom{20}{i}\binom{70-20}{38-i}}{\binom{70}{38}}$$
$$= 0.00593$$

フィッシャーの直接確率と標本サイズ

- 各セルの標本サイズが倍になると確率は小さくなる

男3人・女2人で、当たりがくじ2つのとき
2つとも男が当たりくじを引く確率は？

		くじ		計
		当たり	はずれ	
性別	男	2	1	3
	女	0	2	2
計		2	3	5

$$\frac{\binom{3}{2}\times\binom{5-3}{2-2}}{\binom{5}{2}} = 0.3$$

男6人・女4人で、当たりくじが4つのとき
4つとも男が当たりくじを引く確率は？

		くじ		計
		当たり	はずれ	
性別	男	4	2	6
	女	0	4	4
計		4	6	10

$$\frac{\binom{6}{4}\times\binom{10-6}{4-4}}{\binom{10}{4}} = 0.07143$$

標本サイズが増えても分布の偏りが維持されるということは
もともと偏っていると考えた方が自然？

(復習)第一種過誤と第二種過誤

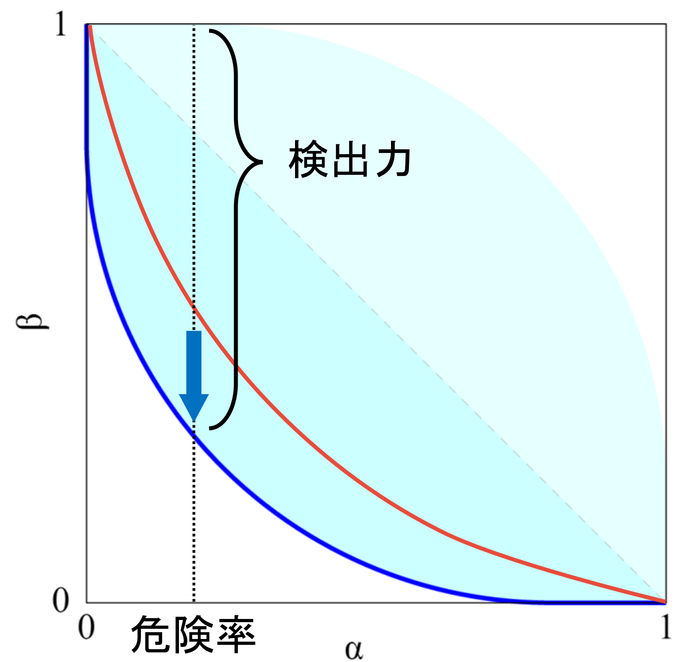
- **第一種過誤 (type-I error): 確率 α**
  - **帰無仮説が<u>正しい</u>にもかかわらず<u>棄却</u>してしまう誤り**
  - **α は危険率とも呼ばれる**
- **第二種過誤 (type-II error): 確率 β**
  - **帰無仮説が<u>正しくない</u>にもかかわらず<u>棄却しない</u>誤り**
  - **$1-\beta$ を検出力 (正しくない帰無仮説を棄却できる確率) とよぶ**

あわて者の誤り

ぼんやり者の誤り

あらかじめ定めた十分小さい有意水準 α に対して β をなるべく小さくしたい

α と β との間にはトレードオフの関係が存在



過誤の起こり方をシミュレート

- ある母集団に対して標本抽出と検定を繰り返してみる
  - ある母集団を適当に決める
    - 独立である場合
    - 独立でない場合
  - あるサイズの標本を抽出する
  - 有意水準10%で有意検定を行う

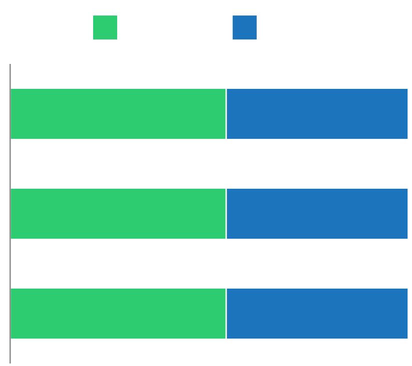
第一種過誤：標本サイズ小

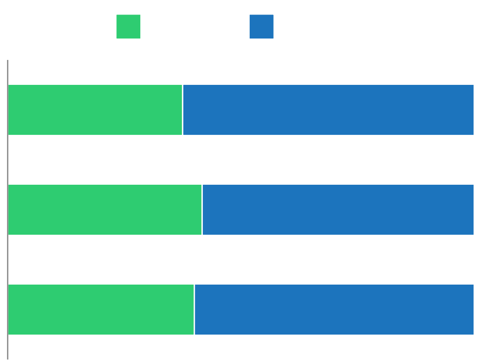
- 母集団が独立である場合
  - 母集団のたこ焼き器所持の割合は同じ

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	5428	4572	10000
その他	13571	11429	25000
計	18999	16901	35000

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	3	5	8
その他	5	7	12
計	8	12	20

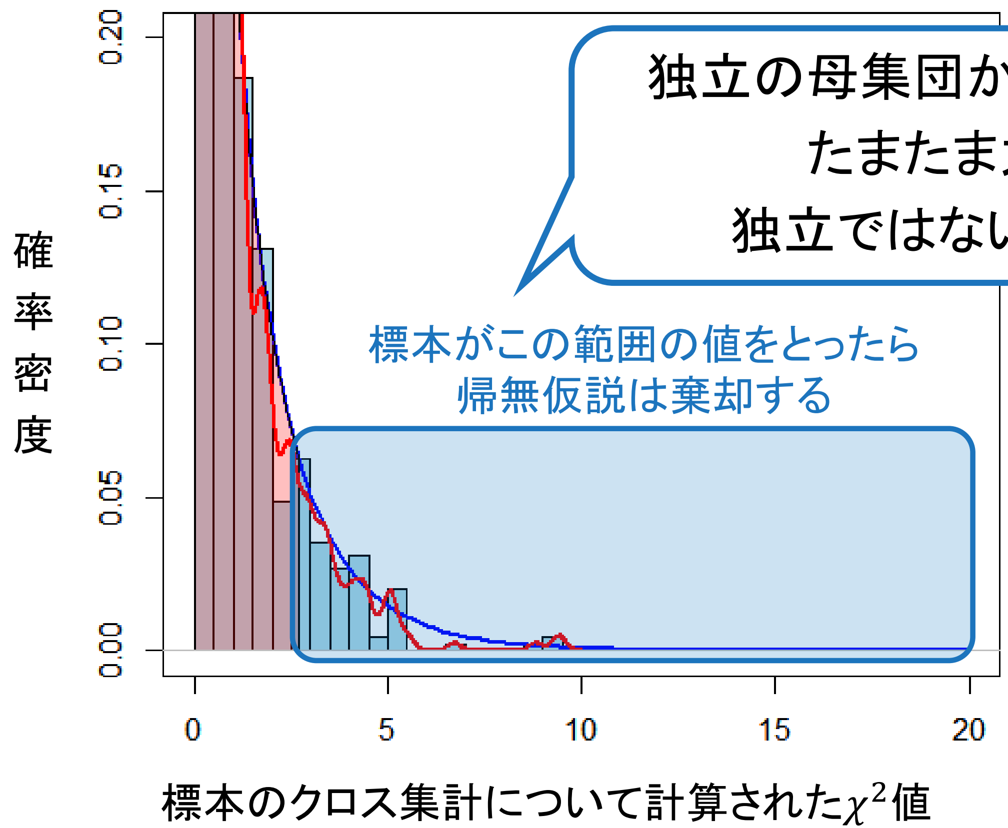
標本サイズ20





第一種過誤：標本サイズ小

- 大きさ20の標本抽出とχ^2値計算を1000回繰り返したところ



独立の母集団からの標本であるにもかかわらず
たまたま大きめの差が生じたので
独立ではないと間違って判断された標本

これが全体の14.1%もあった

第一種の過誤（type I error）
危険率 α

青：帰無仮説の理論値（χ^2分布）
赤：実際のχ^2値の分布

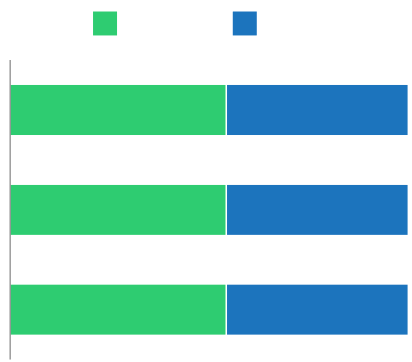
第一種過誤：標本サイズ大

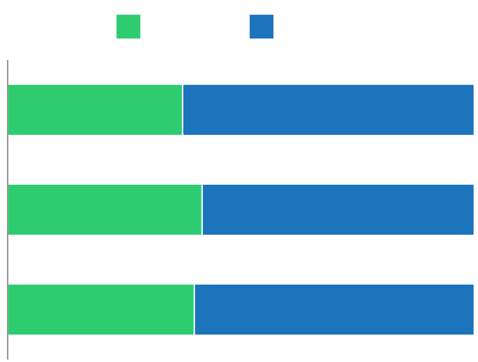
- **母集団が独立である場合**
  - **母集団のたこ焼き器所持の割合は同じ**

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	5428	4572	10000
その他	13571	11429	25000
計	18999	16901	35000

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	15	25	40
その他	25	35	60
計	40	60	100

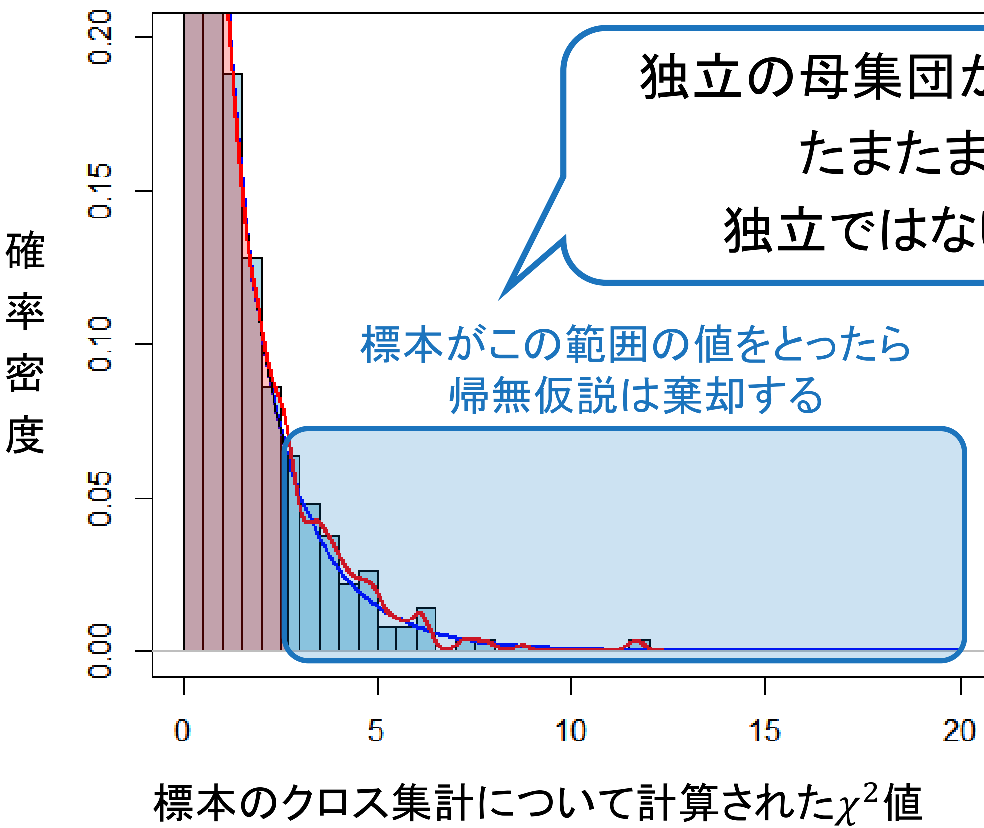
標本サイズ100





第一種過誤：標本サイズ大

- **大きさ100の標本抽出とχ^2値計算を1000回繰り返したところ**



独立の母集団からの標本であるにもかかわらず
たまたま大きめの差が生じたので
独立ではないと間違って判断された標本

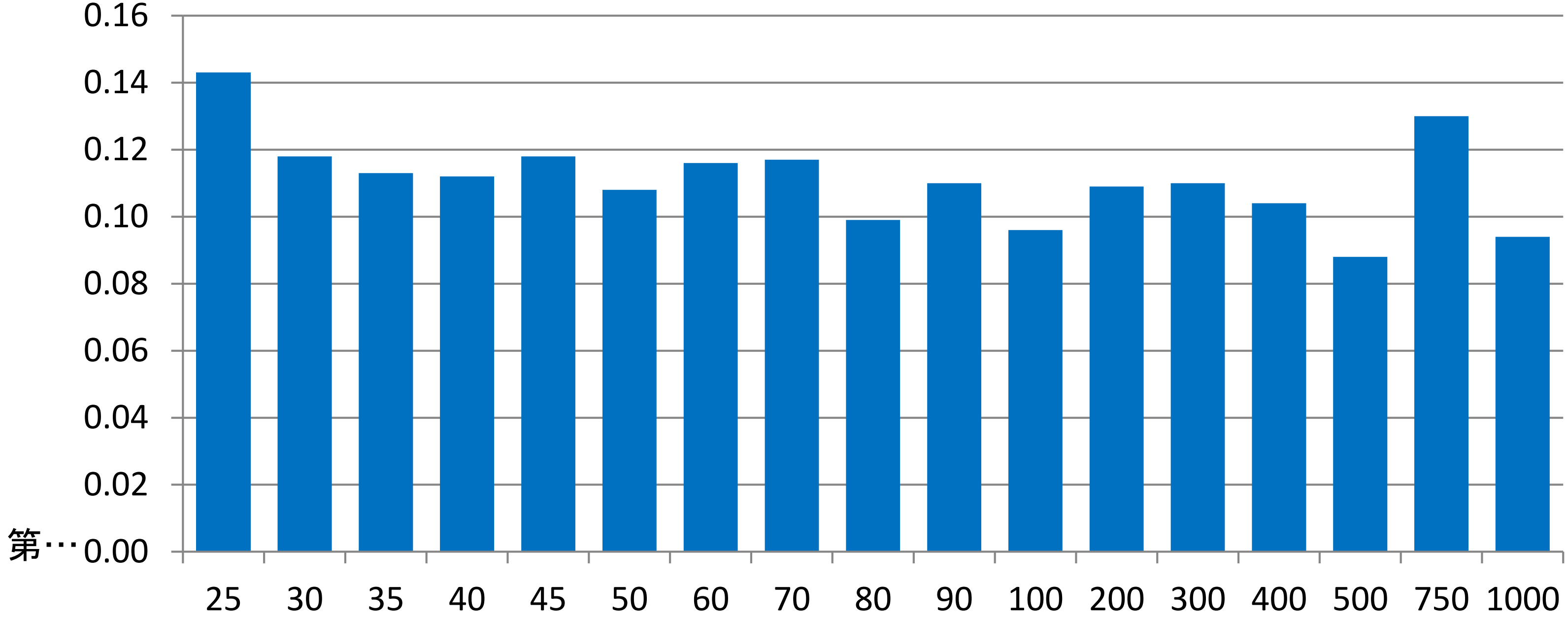
これが全体の10.1%もあった

第一種の過誤（type I error）
危険率 α

青：帰無仮説の理論値（χ^2分布）
赤：実際のχ^2値の分布

第一種過誤と標本サイズ

- 標本サイズが大きくなっても第一種の過誤はほぼ変化なし



第二種過誤：標本サイズ小

- **母集団が独立でない場合**
  - **母集団のたこ焼き器所持の割合は異なる**

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	8000	2000	10000
その他	10000	15000	25000
計	18000	17000	35000

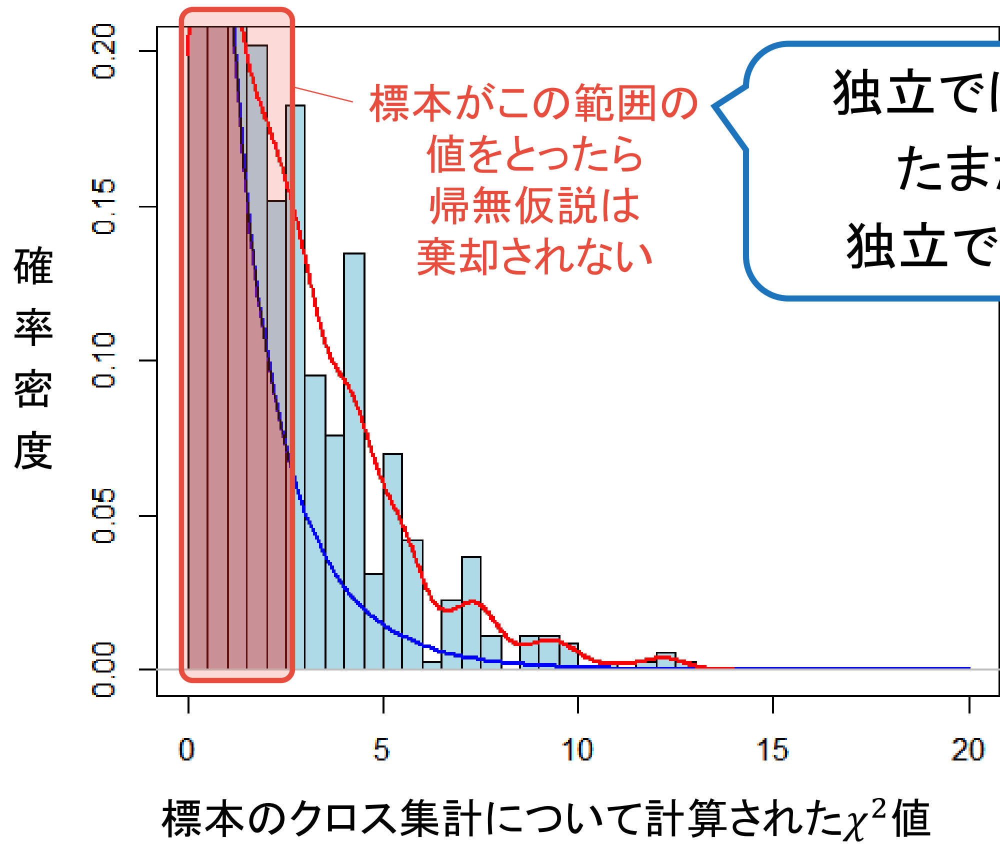
→

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	4	2	6
その他	4	10	14
計	8	12	20

標本サイズ20

第二種過誤：標本サイズ小

- 大きさ20の標本抽出とχ^2値計算を1000回繰り返したところ



独立ではない母集団からの標本なのに
たまたま小さめの差が生じたので
独立ではないと判断できなかった標本

これが全体の46.4%もあった

第二種の過誤（type II error）
確率β（検出力は$1-\beta$）

青：帰無仮説の理論値（χ^2分布）
赤：実際のχ^2値の分布

第二種過誤：標本サイズ大

- **母集団が<u>独立でない</u>場合**
  - **母集団のたこ焼き器所持の割合は<u>異なる</u>**

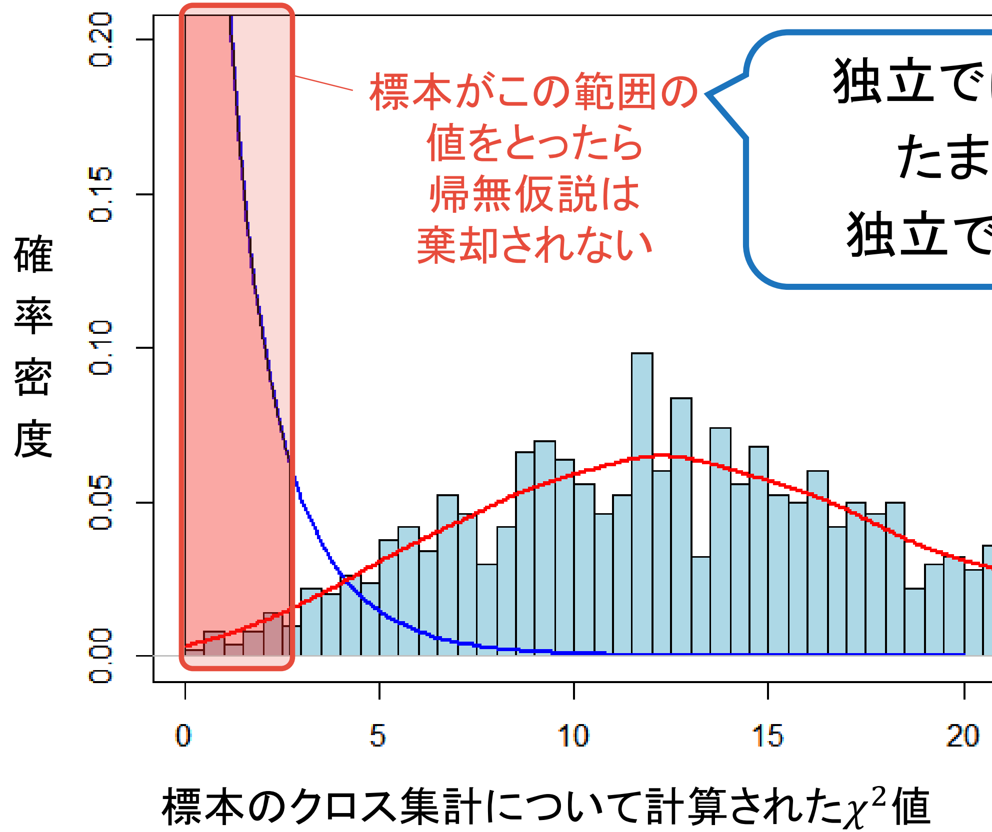
実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	8000	2000	10000
その他	10000	15000	25000
計	18000	17000	35000

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	30	12	42
その他	32	26	58
計	62	38	100

標本サイズ100

第二種過誤：標本サイズ大

- 大きさ100の標本抽出とχ^2値計算を1000回繰り返したところ



独立ではない母集団からの標本なのにたまたま小さめの差が生じたので独立ではないと判断できなかった標本

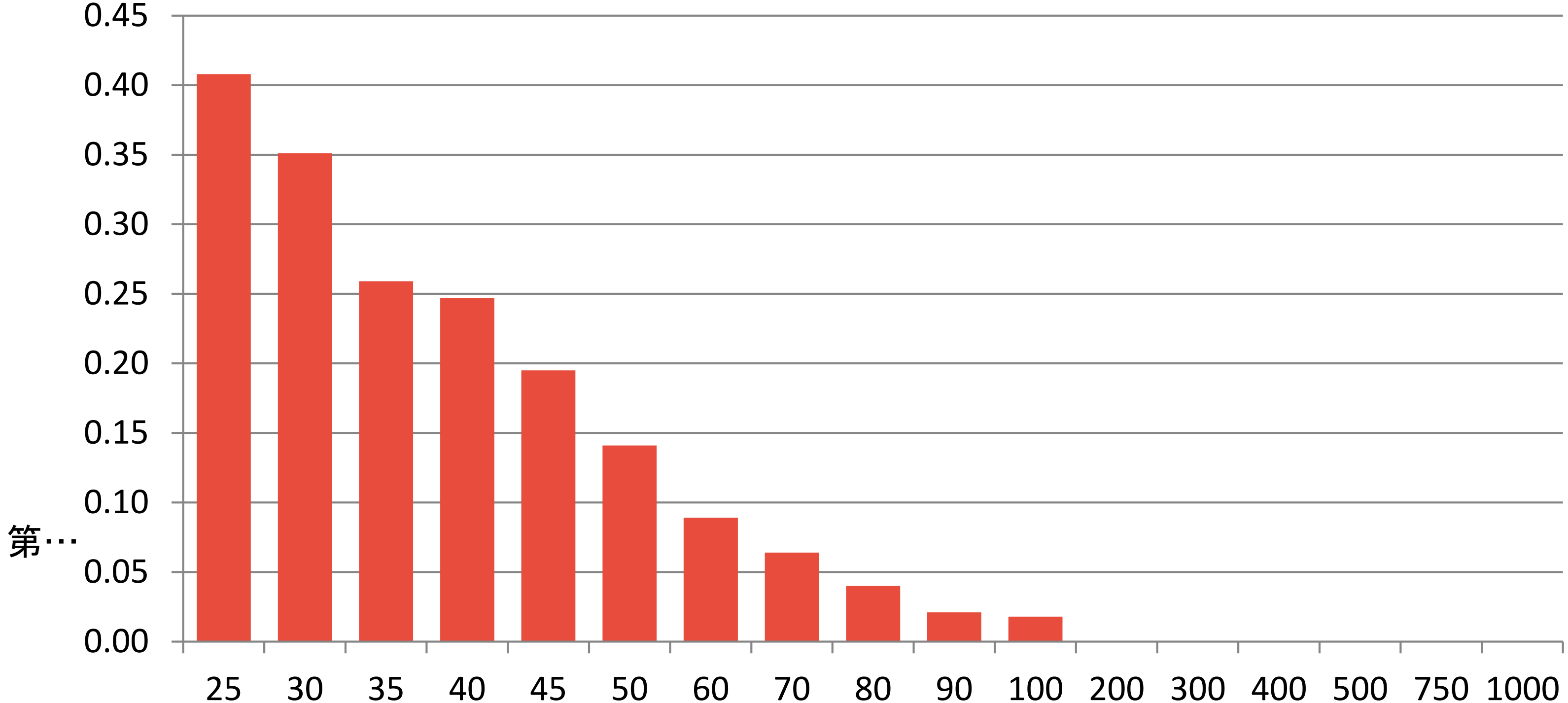
これが全体の2.1%あった

第二種の過誤（type II error）
確率β（検出力は$1-\beta$）

青：帰無仮説の理論値（χ^2分布）
赤：実際のχ^2値の分布

第二種過誤と標本サイズ

- 標本サイズが大きくなると第二種の過誤は減る



第二種過誤：標本サイズ小

- 母集団の絶対リスク差が10ポイントの場合
  - 母集団ではたこ焼き器所持の割合は<u>異なる</u>

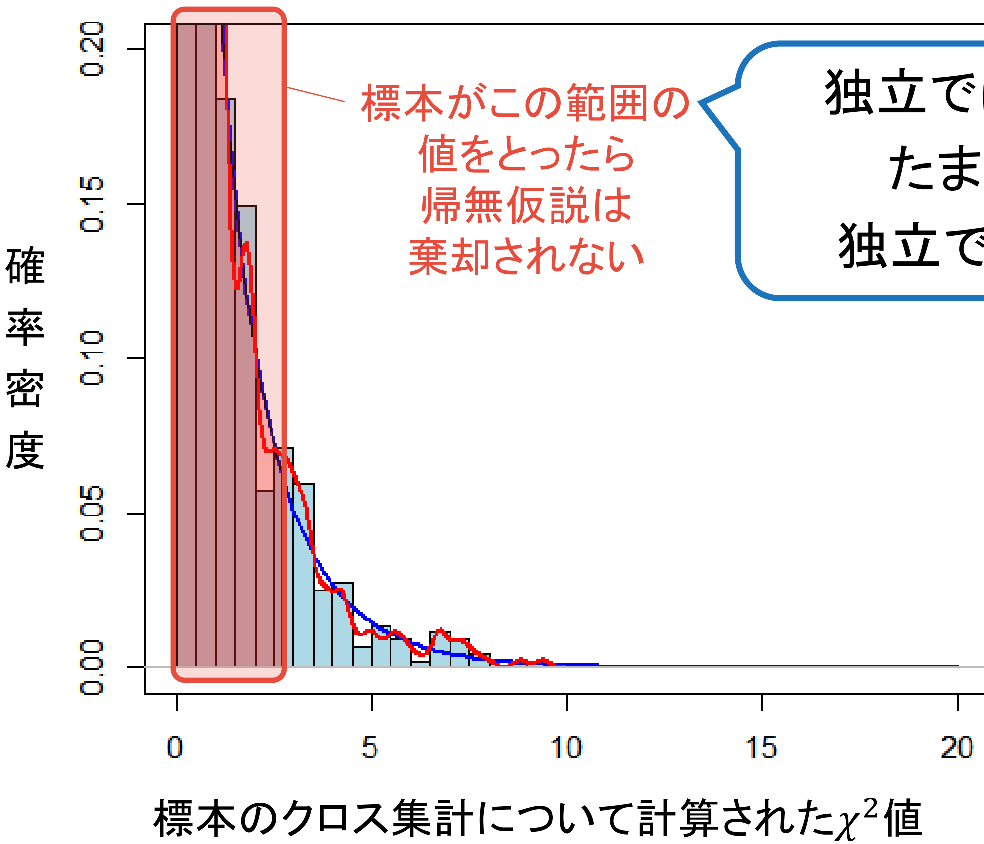
実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	6000	4000	10000
その他	12500	12500	25000
計	18500	16500	35000

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	4	3	7
その他	8	5	13
計	12	8	20

標本サイズ20

第二種過誤：標本サイズ小

- 大きさ20の標本抽出とχ^2値計算を1000回繰り返したところ



独立ではない母集団からの標本なのに
たまたま小さめの差が生じたので
独立ではないと判断できなかった標本

これが全体の77.7%もあった

第二種の過誤（type II error）
確率β（検出力は$1-\beta$）

青：帰無仮説の理論値（χ^2分布）
赤：実際のχ^2値の分布

第二種過誤：標本サイズ大

- 母集団の絶対リスク差が10ポイントの場合
  - 母集団ではたこ焼き器所持の割合は<u>異なる</u>

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	6000	4000	10000
その他	12500	12500	25000
計	18500	16500	35000

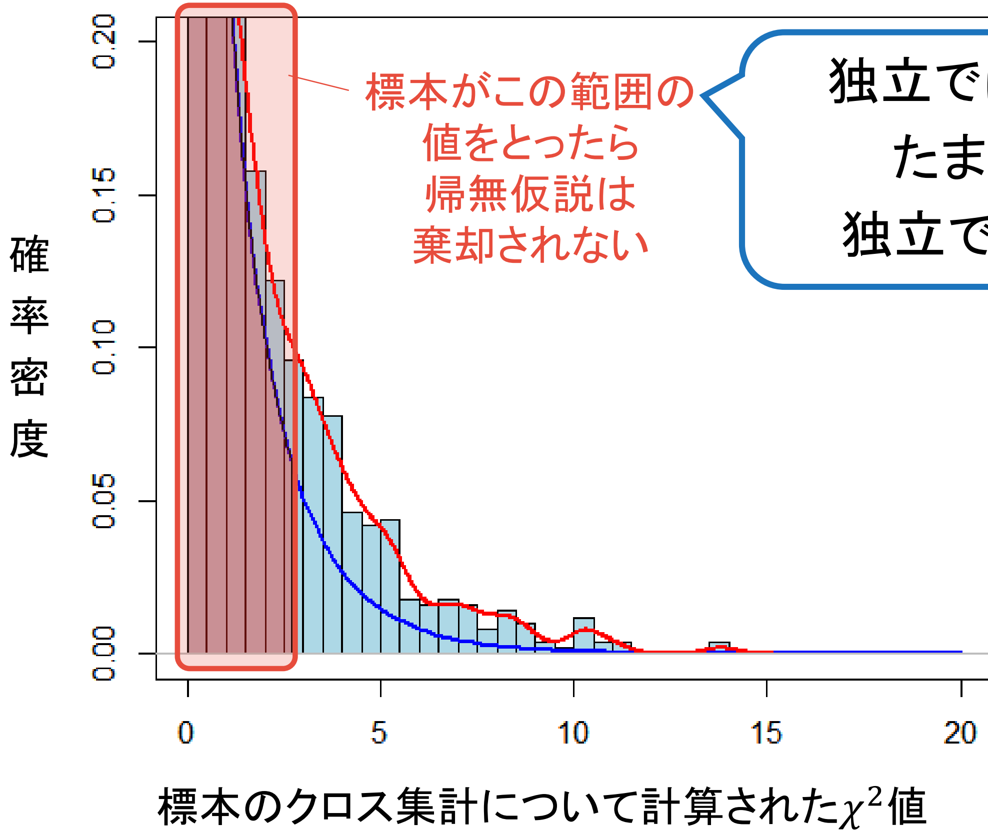
→

実家＼たこ焼き器	有り	無し	計
大阪人	25	20	45
その他	30	25	55
計	55	45	100

標本サイズ100

第二種過誤：標本サイズ大

- 大きさ100の標本抽出とχ^2値計算を1000回繰り返したところ



独立ではない母集団からの標本なのに
たまたま小さめの差が生じたので
独立ではないと判断できなかった標本

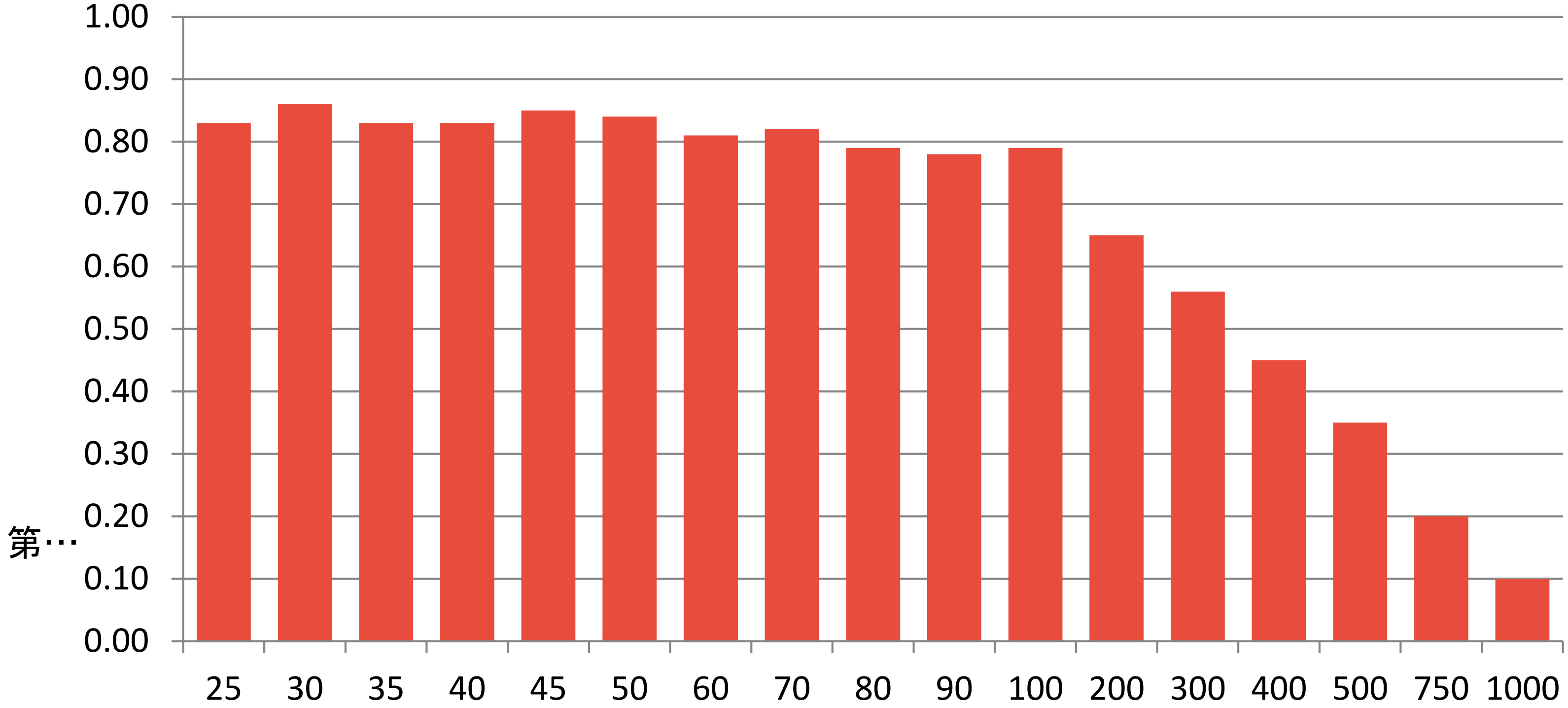
これが全体の75.7%もあった

第二種の過誤（type II error）
確率β（検出力は$1-\beta$）

青：帰無仮説の理論値（χ^2分布）
赤：実際のχ^2値の分布

第二種過誤と標本サイズ

- 母集団の絶対リスク差が小さいと第二種過誤は減りにくい



第一種、第二種過誤と標本サイズ

- 過誤と標本サイズの関係性を正しく理解すること
  - 標本サイズを大きくすると
    - 第一種過誤は減らない
      - 帰無仮説が正しいにもかかわらず棄却してしまう誤り
      - あわてものの誤り
    - 第二種過誤は減る
      - 帰無仮説が正しくないにもかかわらず棄却しない誤り
      - ぼんやり者の誤り

信頼区間と標本サイズ

（復習）正規変数の平均が従う確率分布

- **同じ正規分布に従う二つの確率変数**
  - $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - $X_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$

再生性（reproductive property）（復習）
同じ種類の（正確には同じ族の）分布に従う二つの独立な確率変数に対して、その和もまた同じ種類の分布に従う性質（正規分布・二項分布などは再生性を持つ）

- **正規分布に従う確率変数の和は正規分布に従う**
  - $X_1 + X_2 \sim N(\mu + \mu, \sigma^2 + \sigma^2) = N(2\mu, 2\sigma^2)$
  - **足しても正規分布！（正規分布の再生性より）**
  - n **個の確率変数の和は**$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

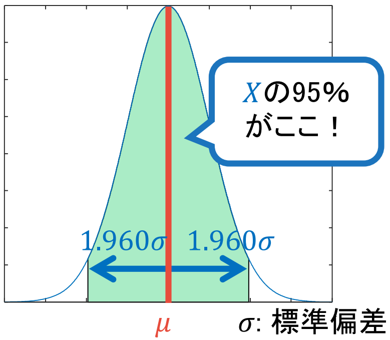
標本の取り方による統計量のばらつき（標準偏差）は標準誤差（SE; standard error）と呼ぶことが多い

- **標本平均 $\bar{X}$ も正規分布に従う**
  - $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \sim N\left(\frac{n\mu}{n}, \frac{n\sigma^2}{n^2}\right) = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
  - **標本平均 $\bar{X}$ は母平均 μ の周りでばらつくが、その標準偏差は** $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

母平均の区間推定（信頼係数95%）

- 確率変数 X が $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき確率95%を与える区間
  - 密度関数：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
  - $0.95=P\left(-1.96\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le 1.96\right)=\int_{-1.96}^{1.96}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z$

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$とおいた標準正規分布$N(0,1)$の表
（もしくはコンピュータ）で区間を見つける



- 観測Xが得られたときに母平均 μ を区間推定
  - 標本サイズ1のとき：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$
  - $X-1.96\sigma\le\mu\le X+1.96\sigma$ が95%で成り立つ
- 観測$X_1,\dots,X_n$が得られたときに母平均 μ を区間推定
  - 標本サイズnのとき：$\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$　　標本平均 $\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$
  - $\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ が95%で成り立つ

区間推定と標本サイズ

- 所望の精度で推定するのに必要な標本サイズを逆算する
  - 元の母数を標本統計量で推定する場合、標本によって統計量は変わる
  - 様々な標本の取り方に対する統計量の分布が正規分布である場合、母数の95%信頼区間は「推定値±1.96 ×標準誤差 (統計量の標準偏差)」
    - 95%の確率で±1.96 ×標準誤差の区間内に収まる
  - 標準誤差が $\frac{a}{\sqrt{n}}$ であるとする → 標本サイズnが増加すると小さくなる
  - 誤差の許容幅をϵとして$1.96 \times \frac{a}{\sqrt{n}} = \epsilon$ を解くと $n^* = \left(\frac{1.96a}{\epsilon}\right)^2$
    - n^*個データを集めると95% の確率で許容幅ϵを達成できる

母平均の推定・検定と標本サイズ

t 分布と t 検定

(復習)1群の標本に対する検定

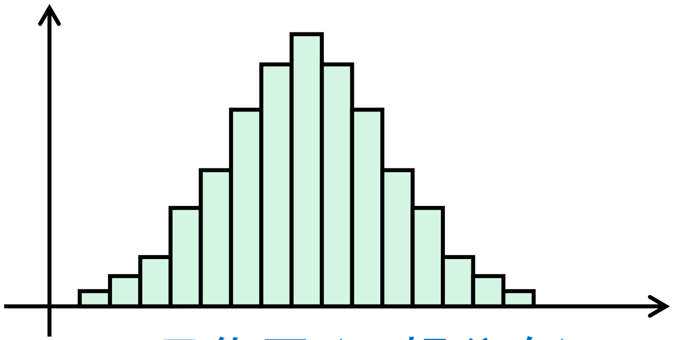
- **正規母集団の平均 μ が特定の値 μ_0 と等しいか否かを検定**
  - **標本平均と標本分散から母平均について知りたい**

母平均	母分散
μ	σ^2
5.78	6.12

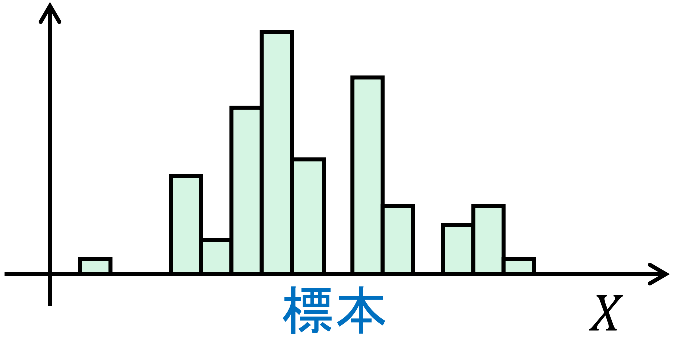
↓抽出　↑予測

標本平均	不偏分散	標本サイズ
$\bar{X}$	s^2	n

実際にデータから値を観測できるのはこちら



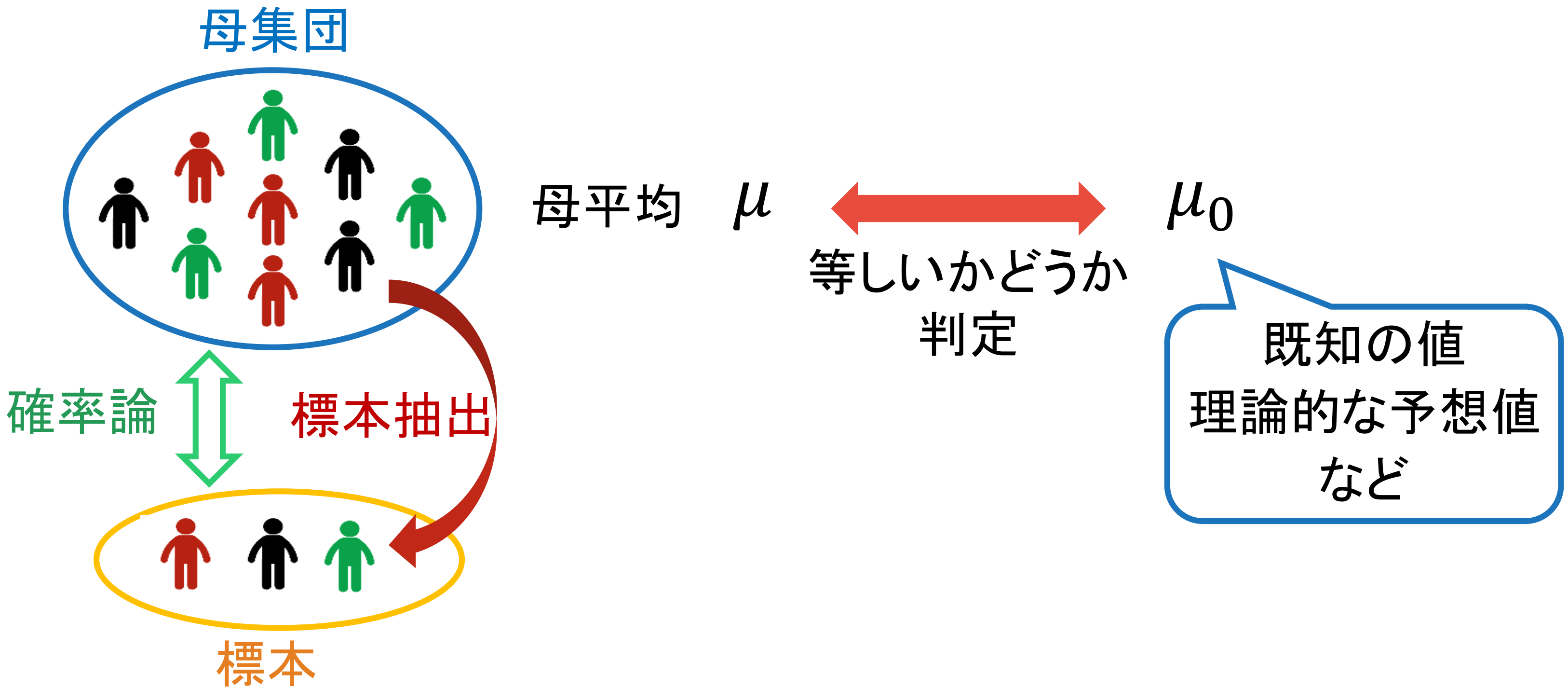
母集団（正規分布）



標本

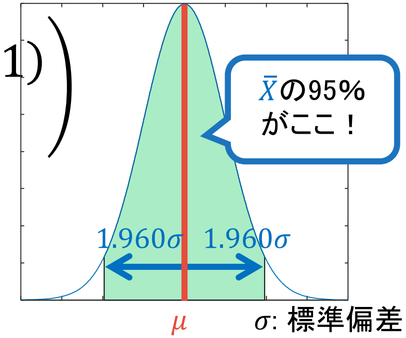
（復習）1群の標本に対する検定

- 観測可能なもの（標本 or 標本平均）から母集団の平均 μ が特定の値 μ_0 と等しいかどうか



標本サイズ大での母平均の推定･検定

- 観測$X_1, \ldots, X_n$が得られたとき $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ $\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)\right)$



- 母平均μを区間推定
  - $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$より $P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq 1.96\right) = 0.95$
  - ゆえに $\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ は確率95%で成立

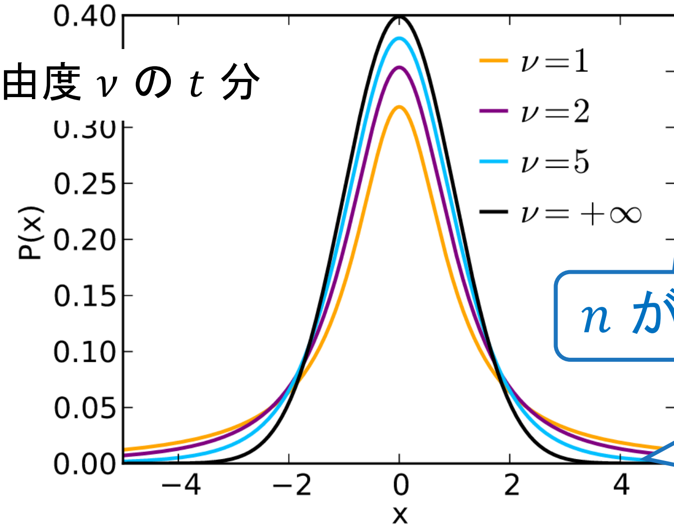
$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$

- 母平均$\mu \neq \mu_0$を両側検定
  - 帰無仮説: $\mu = \mu_0$ が真なら $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N\,(0,1)$ が成り立つ
  - Z の観測値 $Z^* \geq 1.96$ ならば帰無仮説を棄却
- 母分散σ^2 が未知のとき
  - 標本サイズが大きければ、不偏分散$s^2 \approx \sigma^2$ より近似的に $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim N(0,1)$

標本サイズ小での母平均の推定･検定

- 観測$X_1, \ldots, X_n$が得られたとき $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ $\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)\right)$
  - 標本サイズ n が小さいと不偏分散 s^2 は σ^2 のまわりでばらつく
  - つまり s^2 を σ^2 の代用として使うと、$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim N(0,1)$ とはいえない
  - 実際には標準正規分布からずれる…自由度 $n-1$ の t 分布に従う！

自由度 ν の t 分布



$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t(n-1)$$

n が大きいならほぼ正規分布

正規分布よりも裾野が広い

ステューデントの t 分布

- **統計学上極めて重要な発見（小標本の問題）**
  - ギネスビール社ダブリン醸造所（アイルランド）の社員であったゴセットによる貢献
    - 同社では当時社員の論文発表を禁止していたため、Student というペンネームで論文を発表（1908）
  - フィッシャーが研究の重要性を見出し、統計量に t という記号をあてたため、この統計量の従う分布はステューデントの t 分布と呼ばれる
    - 当時は大標本を測定することに重きが置かれていたが醸造技術者らの現場では小さな標本サイズを利用せざるを得ない場合も多かった
  - それ以前は正規分布を用いていたため、リスクを過小に見積もっていたことになる
    - 現実には外れ値（outlier）は結構起こりうる

1群の標本に対する平均の検定（母分散未知）

- **仮説を設定**
  - **帰無仮説：母平均 μ はある値 μ_0 と等しい** $(\mu = \mu_0)$
  - **対立仮説：母平均 μ はある値 μ_0 より大きい** $(\mu > \mu_0)$ **（片側検定）**
- **t 統計量を計算**
  - **標本サイズ n の標本の母平均 μ がある値 μ_0 と等しければ標準化した標本平均は自由度 $n-1$ の t 分布に従う**

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t\,(n-1)$$

実際に標本から計算（観測）した t の値（実現値）を t^* とする

- **p 値を計算**
  - 帰無仮説が正しいとき t が標本での実現値 t^* 以上となる確率を求める

片側検定なら $P(t \geq t^*; n-1)$　両側検定なら $2P\,(t \geq |t^*|)$

t 検定の実行例

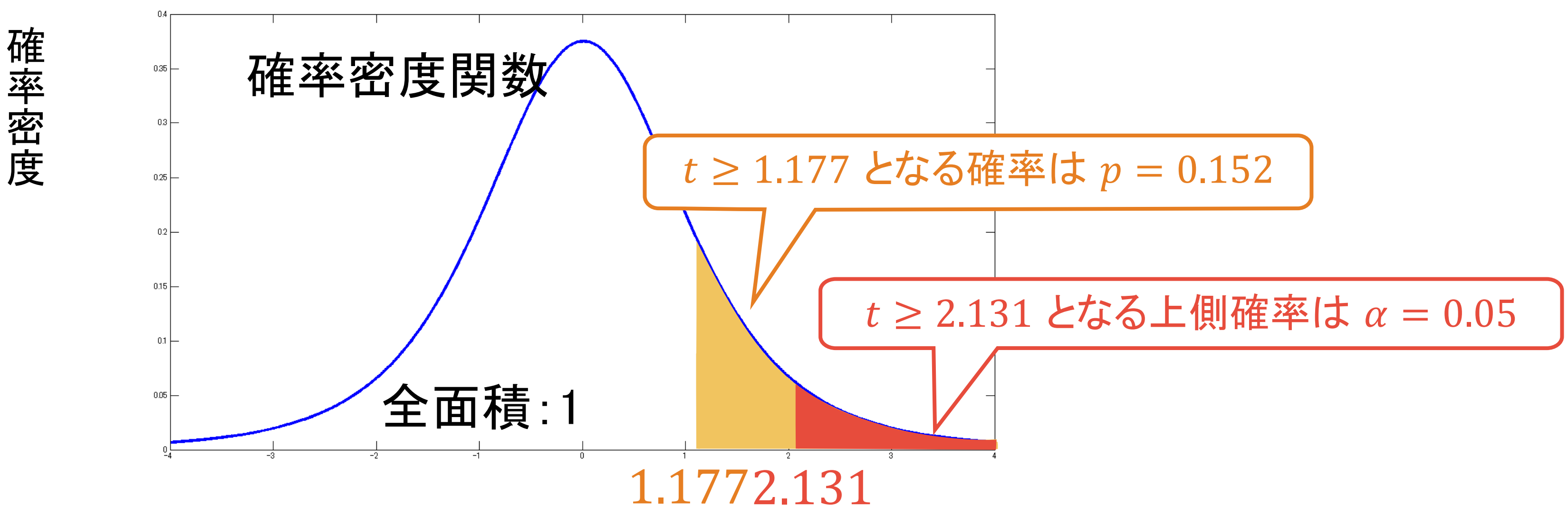
- 母集団の平均 μ がある値 μ_0 と差があるか検定したい
  - 例：牛乳をたくさん飲むと身長が伸びるか？
    - 被験者5人の1年間の身長の伸びは以下の通り
      - $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} = \{1cm, 2cm, 3cm, 3cm, 4cm\}$
      - 標本平均：$\bar{X} = 2.6cm$　　不偏分散：$s^2 = 1.3cm^2$
      - 母平均：μ（未知 / 検定の対象）
    - 全国の中学生の平均身長の伸びは既知：$\mu_0 = 2cm$
    - 仮説検定
      - 帰無仮説：牛乳を大量に飲んでも背は伸びない（$\mu = \mu_0$）
      - 対立仮説：牛乳を大量に飲んだら背が伸びる（$\mu > \mu_0$）

t 検定の実行例

- **自由度 4 の t 分布を用いて有意水準 5% で検定**

  標本平均 $\bar{X} = 2.6$, 不偏分散 $s^2 = 1.3$の標本における

  検定統計量 $t = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ の実現値は $t^* = \dfrac{2.6-2}{\sqrt{\frac{1.3}{5}}} = 1.177$



「t 検定の結果、有意差は認められなかった ($p = 0.152 > 0.05$)」

まとめ（母分散が未知の場合）

- **母集団の平均の検定をする場合、母分散も未知の場合が多い**
  - 母分散 σ^2 の代わりに不偏分散 s^2 を用いて標本平均を標準化（t 統計量）
- **標本サイズ n が小さいとき**
  - t 統計量は自由度 $n-1$ の t 分布に従う（母集団は正規分布を仮定）
    - $t(n-1)$ を利用した t 検定を行う
- **標本サイズ n が大きいとき**
  - 不偏分散$s^2 \approx$ 母分散 σ^2
  - t 統計量は $N(0,1)$ に従う
    - $N(0,1)$ による検定が可能（母集団が一般の分布でも近似的にOK）
    - 正規母集団を仮定できるときは通常 t 検定を行う（t 分布 $\approx N(0,1)$）

連絡事項

連絡

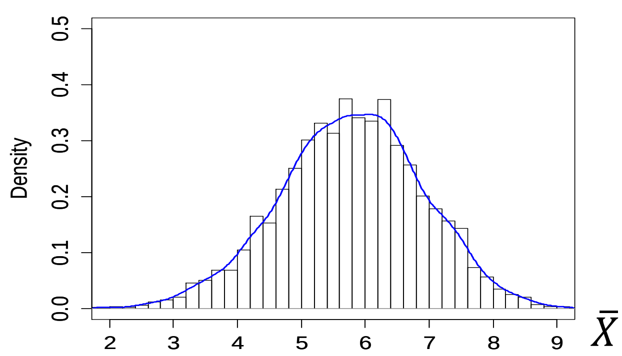
- 第13回は7/12(木) を予定
  - 統計と統計学の利用
  - 資料を事前にアップロードしておくので、予習をすすめます
- 宿題
  - 以下の場合、母平均の区間推定はどうなるか？
    - 母集団は正規分布に従う
    - 標本サイズは小さい
  - 以下の場合についても考えてみよ
    - 母集団は正規分布に従わない
    - 標本サイズは小さい

補足

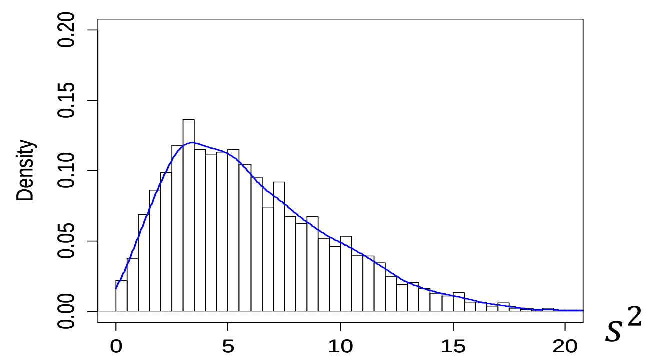
標本平均と不偏分散の分布

- **母分散が未知の場合はどうか？**
  - **母分散 σ^2 の代わりに不偏分散 s^2 を使ってよいか？**
    - **標本サイズが小さい時には「ゆらぎ」が大きい**
  - **標本平均と不偏分散のヒストグラムを調べてみると･･･**
    - **標本平均**: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **は正規分布の形に**
    - **不偏分散**: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ **は χ^2分布の形に？？**

標本平均の分布

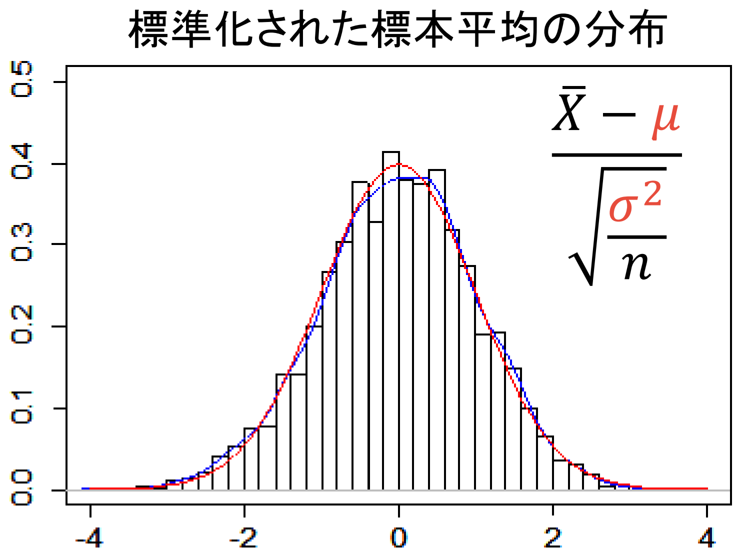


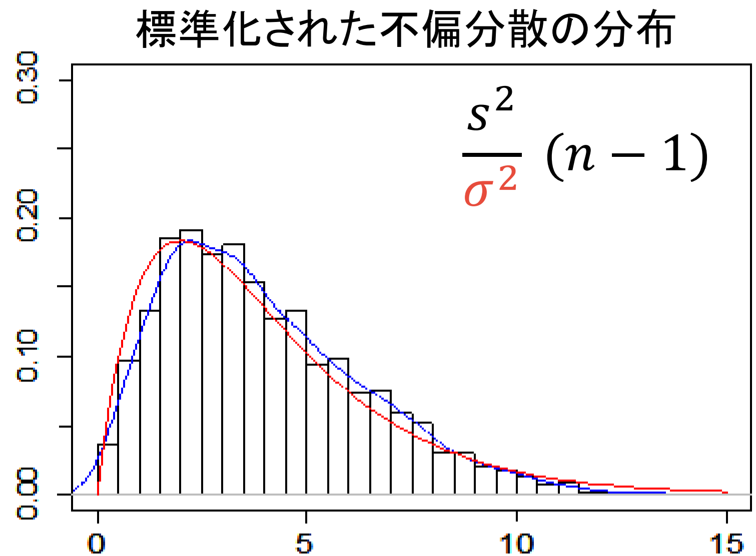
不偏分散の分布



標準化した標本平均と不偏分散の分布

- 母平均 μ と母分散 σ^2 で標準化した標本平均 $\bar{X}$ の分布は？
  - 標準正規分布に従う
- 母分散 σ^2 で標準化した不偏分散 s^2 の分布は？
  - 自由度 $n-1$ の χ^2分布に従う





標本平均と不偏分散

	標本平均	不偏分散
	$\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$	$s^2 = \dfrac{(X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2}{n-1}$
平均	$E[\bar{X}] = \mu$ （不偏性）	$E[s^2] = \sigma^2$ （不偏性）
分散	$V[\bar{X}] = \dfrac{\sigma^2}{n}$	
分布の形	（母集団が正規分布のとき） 正規分布 （母集団が一般の分布のとき） n が十分に大きいと正規分布	（母集団が正規分布のとき） $(n-1)s^2/\sigma^2$は 自由度 $n-1$ のχ^2分布

無作為抽出を仮定

不偏分散で標準化した標本平均の分布

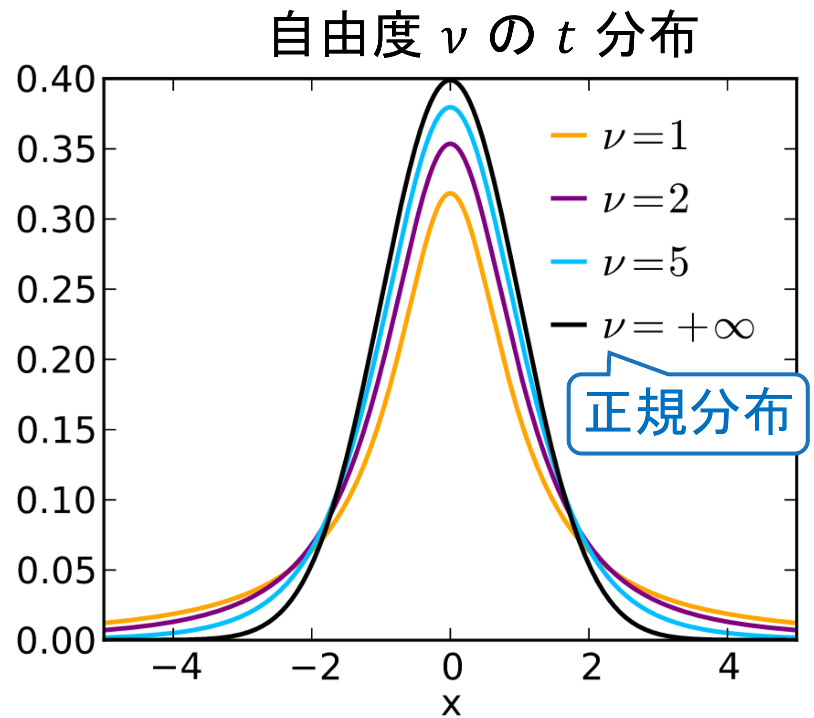
- 母平均 μ と不偏分散 s^2 で標準化した標本平均 $\bar{X}$ の分布は？
  - 自由度 $n-1$ の t 分布に従う

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{s^2}{\sigma^2}(n-1)}{n-1}}}$$

確率密度

σ^2 を s^2 で代用

$$\frac{\text{標準正規分布}}{\sqrt{\frac{\text{自由度 } n-1 \text{ のカイ二乗分布}}{n-1}}}$$



ステューデントの t 分布

- **ゴセットによって小標本の問題を扱うために発見**
  - **確率密度関数**

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

ガンマ関数

標本サイズ n が増加するほど
不偏分散は母分散に近づく

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

標本サイズ小では
t 分布に従う

標本サイズ大では
正規分布に従う

正規分布よりも裾野が広い