アラケロフ幾何入門
— ボゴモロフ予想に向けて —

川口　周，森脇　淳，山木　壱彦

Date: 1/March/1999, 5:00PM, (Version 1.0).

目次

序

最近のアラケロフ幾何の発展は著しいものがあり，数論幾何の重要な一部門を形成してる．いろいろな方面からの要望に答え，アラケロフ幾何入門を目的とした勉強会“アラケロフ幾何とその周辺”を１９９８年１２月８日〜１０日に行った．このノートは，その勉強会のうちアラケロフ幾何入門の講義をもとに作成したものである．

上の勉強会を催すにあたり，二つの選択肢があった．一つは，基礎的事項をすべての証明をこめて厳密に解説することで，もう一つは，ある目標を決めてそれを理解するために必要な事項を中心に解説することである．始めの方法は，基礎的なことを厳密に学べる利点はあるが，面白くなる以前で終わってしまう欠点がある．一方，後の方法はすべてを学べないが，講義が単調になることを避けることができる．ただ，良い目標を設定する必要がある．幸いボゴモロフ予想を目標にすれば一通り勉強できるので，後の方法で行うことにした．具体的には，算術的 Chow 環，算術的リーマン・ロッホの定理等のアラケロフ幾何の基本事項を完全な証明ぬきで概観し，小さな切断の存在，アデール計量と許容計量，算術的な高さ関数に関しての最近の結果を証明もこめて紹介した後，最後に，ボゴモロフ予想の証明を与えることにした．予備知識として，一般的な代数幾何及び複素幾何のみを仮定している．

ここで，この講義の目標とするボゴモロフ予想（ウルモ・張の定理）について解説しておこう．F を標数 0 の代数閉体，A を F 上定義されたアーベル多様体，X を A の部分代数多様体とする．このとき，レイノウによって証明されたマンフォード・マニン予想（[23]，[24]）とは，$X(F) \cap A(F)_{tor}$ が X でザリスキ位相について稠密なら，X は A の部分アーベル多様体のねじれ点による平行移動であると主張するものである．これを，$F = \overline{\mathbb{Q}}$ のときに一般化したのが，ボゴモロフ予想である．この場合，L を A 上の対称的で豊富な直線束とすると，ネロン・テートによる標準的な高さ関数 $\hat{h}_L : A(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ が定まる．これについて，ボゴモロフ予想とは，任意の正の数 ϵ について，集合 $\{x \in X(\overline{\mathbb{Q}}) \mid \hat{h}_L(x) \leq \epsilon\}$ が X でザリスキ位相について稠密なら，X は A の部分アーベル多様体のねじれ点による平行移動であると主張する予想であり，最近，ウルモ・張（[29]，[32]）によって証明された．X が種数が 2 以上の曲線のとき，自然な写像 $\iota : X(\overline{\mathbb{Q}}) \to A(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$ を考えると，マンフォード・マニン予想は，ι の逆像が有限であることを主張しているのに対して，ボゴモロフ予想は，ι の像が，ノルム $\|\cdot\|_L = \sqrt{\hat{h}_L(\cdot)}$ に関する位相で離散的であることも主張している．これは，素朴なイメージとは違った様相をあらわしており，非常に興味深い結果である．なお，F が $\mathbb{Q}$ 上有限生成の体の代数閉包の場合に，ボゴモロフ予想は，最近，森脇によって拡張されており（[21]），これにより，一般の代数閉体上のマンフォード・マニン予想もその結論になった．

１，２，３章は川口が，４章は山木が，５，６章は森脇が担当した．さらに，全体の調整は森脇が行った．何分，短い期間で作成したので，数々の誤りが含んでいると思われるが，誤りを修正した最新版をインターネット上で公開していきたいと思う．

1. 算術的 Chow 群

1.1. イントロダクション. アラケロフ幾何とは，おおまかに言って

- 体上の代数多様体の代りに，$\mathbb{Z}$ 上のスキームと ∞ 点
- ベクトル束の代りに，∞ 点に計量の入ったベクトル束

を考えるというのものである．Szpiro は アラケロフ幾何について

> Put metrics at infinity on vector bundles and you will have a geometric intuition of compact varieties to help you.

と言っている（[27]）．このことを簡単な場合だが，コンパクトリーマン面と $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ を対比させることによって見てみよう．

X を コンパクトリーマン面とする．

(A) f を X 上の零でない有理関数とすると

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{p \in X} v_p(f) \cdot [p] \in \bigoplus_{p \in X} \mathbb{Z} \cdot [p] = \operatorname{Div}(X)$$

であって，留数定理より

$$\deg(f) = \sum_{p \in X} v_p(f) = 0$$

となる．$\operatorname{Rat}(X) = \{\operatorname{div}(f) \mid f \in \mathbb{C}(X)^*\} \subset \operatorname{Div}(X)$ とおいて，$\mathrm{CH}^1(X) = \operatorname{Div}(X)/\operatorname{Rat}(X)$ とおく．すると $\deg : \operatorname{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ は，$\deg : \mathrm{CH}^1(X) \to \mathbb{Z}$ を定める．

(B) L を X 上の 正則な直線束，s を L の零でない有理切断とし，

$$\operatorname{div}(s) = \sum_{p \in X} v_p(s) \cdot [p] \in \mathrm{CH}^1(X)$$

とおく．$\mathrm{CH}^1(X)$ の元としては，$\operatorname{div}(s)$ は s の取り方に依らない．

(C) $\operatorname{Pic}(X)$ で，X 上の直線束の同型類からなる群を表すことにすれば

$$c_1 : \operatorname{Pic}(X) \to \mathrm{CH}^1(X), \quad L \mapsto \operatorname{div}(s)$$

は同型となる（s は L の零でない有理切断）．特にこの同型を通して，$\deg : \operatorname{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ が定まる．

今度は $\mathcal{X} = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ とする．

(A') ∞ 点を付け加えるので，$f \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ に対して

$$v_\infty(f) = -\log |f|^2 \in \mathbb{R}$$

とおく．また

$$\widehat{\operatorname{Div}}(\mathcal{X}) = \left(\bigoplus_{p:\text{素数}} \mathbb{Z} \cdot [p] \right) \oplus \mathbb{R} \cdot [\infty]$$

$$\widehat{\operatorname{div}}(f) = \sum_{p:\text{素数}} v_p(f) \cdot [p] + v_\infty(f) \cdot [\infty]$$

とおく． $\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ を

$$\sum_{p:\text{素数}} n_p \cdot [p] + a \cdot [\infty] \mapsto \sum_{p:\text{素数}} n_p \log p + \frac{1}{2} a$$

で定義すると，積公式（product formula）より

$$\widehat{\deg}(\widehat{\mathrm{div}}(f)) = \sum_{p:\text{素数}} v_p(f) \log p + \frac{1}{2} v_\infty(f) = 0$$

となる（今の場合は簡単で，f を因数分解すればよい）．

$$\widehat{\mathrm{Rat}}(\mathcal{X}) = \{\widehat{\mathrm{div}}(f) \mid f \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\} \subset \widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{X})$$

とおいて，$\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{X}) = \widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{X}) / \widehat{\mathrm{Rat}}(\mathcal{X})$ とおく．すると，$\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{X}) \to \mathbb{Z}$ は，$\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{X}) \to \mathbb{Z}$ を定める．

(B’) $\mathcal{L}$ を $\mathcal{X}$ の直線束とする． ∞ 点に計量を入れるので，ベクトル空間 $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ （1 次元であるが）のエルミート計量

$$h : \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

を考えよう． 対 $(\mathcal{L}, h)$ を $\overline{\mathcal{L}}$ と書き，エルミート直線束と呼ぶ．s を $\mathcal{L}$ の零でない有理切断とし

$$\widehat{\mathrm{div}}(s) = \sum_{p:\text{素数}} v_p(s) \cdot [p] + (-\log h(s_{\mathbb{C}}, s_{\mathbb{C}})) \cdot [\infty] \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(X)$$

と定めれば，$\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{X})$ の元としては，$\widehat{\mathrm{div}}(s)$ は s の取り方に依らない．

(C’) 2 つの エルミート直線束 $\overline{\mathcal{L}}_1 = (\mathcal{L}_1, h_1)$ と $\overline{\mathcal{L}}_2 = (\mathcal{L}_2, h_2)$ が同型であるとは，直線束の同型射 $\phi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ であって，$\phi_{\mathbb{C}} : (\mathcal{L}_{1\mathbb{C}}, h_1) \to (\mathcal{L}_{2\mathbb{C}}, h_2)$ が等長になるものが存在することと定める．$\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X})$ で，$\mathcal{X}$ 上のエルミート直線束の同型類からなる群を表せば，

$$\widehat{c}_1 : \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X}) \to \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{X}), \quad \overline{\mathcal{L}} \mapsto \widehat{\mathrm{div}}(s)$$

が存在して同型になる（s は $\mathcal{L}$ の零でない有理切断）．特にこの同型を通して，$\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X}) \to \mathbb{Z}$ が定まる．$\widehat{c}_1$ が同型になることについては，より一般的な場合に証明する（命題 1.3.4）．

このように $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ に ∞ 点を付け加え，エルミート直線束を考えることによって，$f \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ に対して，$\widehat{\deg}(\widehat{\mathrm{div}}(f)) = 0$ となるような（つまりコンパクトリーマン面のときと同じような）degree 写像が定まったわけである．

今度は高次元のときを考えてみる．例えば，$\mathcal{X}$ を射影的な算術的曲面としてみよう．正確な定義は§§1.3 で述べるが，その具体的な例（別に何でもいいのだが）として

$$\mathcal{X} = \mathrm{Proj}\left(\mathbb{Z}[X, Y, Z]/(Y^2 Z = X^3 + X Z^2)\right)$$

をとろう．

∞ 点を考えるということは，コンパクトリーマン面

$$\mathcal{X}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Proj}\left(\mathbb{C}[X, Y, Z]/(Y^2 Z = X^3 + X Z^2)\right)$$

を考えることである．

また，∞ 点に計量の入った直線束を考えるということは，$\mathcal{X}$ 上の直線束 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ のエルミート計量 h の対 $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ を考えるということである．

このとき，$\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{X})$ とはどういうものだろうか．$\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ のときを思い出してみると，s を $\mathcal{L}$ の零でない有理切断として

$$(\mathrm{div}(s), -\log h(s_{\mathbb{C}}, s_{\mathbb{C}}))$$

みたいなものが，$\mathcal{X}$ の “算術的因子” になると思われよう．ここで $\mathrm{div}(s)$ は $\mathcal{X}$ 上の因子であり，$-\log h(s_{\mathbb{C}}, s_{\mathbb{C}})$ は $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ 上の可積分関数である．

次の小節から，これらについて正確に述べていきたい．すなわち，Gillet と Soulé [8] による算術的多様体，その上の算術的 Chow 群と，その交叉理論を説明したい．

先走ってしまうが，一般に算術的多様体 $\mathcal{X}$ 上の算術的サイクルとは，対 $(\mathcal{Z}, g)$ で，$\mathcal{Z}$ は $\mathcal{X}$ 上のサイクル，g は $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ 上のグリーンカレントというものであり，上の $(\mathrm{div}(s), -\log h(s_{\mathbb{C}}, s_{\mathbb{C}}))$ はそのようなものの例になっている．

そこで，まずカレントの定義から始めよう．

1.2. **カレント．** X を d 次元のコンパクトな複素多様体とする．$A^{p,q}(X)$ で C^∞ な (p,q)-微分形式の空間を表す．

定義 1.2.1. X 上の (p,q)-型の**カレント**（*current*）とは，$\mathbb{C}$-線型写像

$$T : A^{d-p,d-q}(X) \to \mathbb{C}$$

で，$A^{d-p,d-q}(X)$ に Schwartz 位相を入れたときに連続なものである．つまり，数列 $(\omega_n)_{n=1}^{\infty} \subset A^{n-p,n-q}(X)$ に対して，$\omega_n \to 0$ なら $T(\omega_n) \to 0$ になるものである．ここで $\omega_n \to 0$ とは，ω_n を局所座標 $(z_1, \ldots, z_d)$ を用いて，局所的に

$$\omega_n = \sum_{|I|=n-p, |J|=n-q} f_n^{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

と書いたとき，係数 $f_n^{I,J}$ とそれらを有限回微分したものが，$n \to \infty$ のときに一様に 0 に収束するという意味である．いずれにせよ，位相については忘れてもらっても以後困らない．

(p,q)-型のカレント全体の空間を $D^{p,q}(X)$ とおく．

例 1.2.2. $\omega \in A^{p,q}(X)$ に対して，カレント $[\omega] \in D^{p,q}(X)$ が

$$[\omega] : A^{d-p,d-q}(X) \to \mathbb{C}, \quad \eta \mapsto \int_X \omega \wedge \eta$$

で定まる．

$$[\cdot] : A^{p,q}(X) \to D^{p,q}(X), \quad \omega \mapsto [\omega]$$

によって，$A^{p,q}(X)$ は $D^{p,q}(X)$ の部分空間とみなせる．

例 1.2.3. ω を，係数が局所可積分関数である (p,q)-微分形式とする．このときも，例 1.2.2 と同じようにして，カレント $[\omega] \in D^{p,q}(X)$ が定まる．

例 1.2.4. X を非特異な複素射影代数多様体とする．$Y \subset X$ を，余次元 p の既約な閉部分代数多様体とする．このとき，ディラック型のカレント $\delta_Y \in D^{p,p}(X)$ が

$$\delta_Y : A^{d-p,d-p}(X) \to \mathbb{C}, \quad \eta \to \int_{Y^{ns}} \eta$$

で定まる． ここで，Y^{ns} は Y の非特異な点全体からなる集合である．$\pi : \widetilde{Y} \to Y$ を Y の特異点解消とすれば，

$$\delta_Y(\eta) = \int_{\widetilde{Y}} \pi^*(\eta)$$

となっているので，この積分は収束する．

例 1.2.5. 一般に，余次元 p のサイクル $Y = \sum_\alpha n_\alpha Y_\alpha$ （$n_\alpha \in \mathbb{Z}$, 有限和）についても，カレント $\delta_Y \in D^{p,p}(X)$ が

$$\delta_Y = \sum_\alpha n_\alpha \delta_{Y_\alpha}$$

で定まる．

$\bigoplus_{p,q} D^{p,q}(X)$ に微分作用素を定義しよう．$T \in D^{p,q}(X)$ に対して，$\partial T \in D^{p+1,q}(X)$ を

$$\partial T(\eta) = (-1)^{p+q+1} T(\partial \eta) \qquad (\eta \in A^{d-(p+1),d-q}(X))$$

で定めよう． ここで $(-1)^{p+q+1}$ が付いているのは，次の図式

$$\begin{array}{ccc} A^{p,q}(X) & \xrightarrow{[\cdot]} & D^{p,q}(X) \\ \partial \big\downarrow & & \partial \big\downarrow \\ A^{p+1,q}(X) & \xrightarrow{[\cdot]} & D^{p+1,q}(X) \end{array}$$

を可換にするためである． 実際，$\omega \in A^{p,q}(X), \eta \in A^{d-(p+1),d-q}(X)$ に対して，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_X d(\omega \wedge \eta) \qquad \text{(Stokes)} \\ &= \int_X \partial(\omega \wedge \eta) \\ &= \int_X (\partial\omega) \wedge \eta + (-1)^{p+q} \int_X \omega \wedge (\partial\eta) \\ &= [\partial\omega](\eta) + (-1)^{p+q}[\omega](\partial\eta) \\ &= \left([\partial\omega] - (-1)^{p+q+1}\partial[\omega]\right)(\eta) \end{aligned}$$

となるから，$[\partial\omega] = (-1)^{p+q+1}\partial[\omega]$ となる．

同様に $T \in D^{p,q}(X)$ に対して，$\overline{\partial} T \in D^{p,q+1}(X)$ を

$$\overline{\partial} T(\eta) = (-1)^{p+q+1} T(\overline{\partial}\eta) \qquad (\eta \in A^{d-p,d-(q+1)}(X))$$

で定めれば，同様の図式を可換にする．

さらに

$$d = \partial + \overline{\partial}$$
$$d^c = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \overline{\partial})$$

とおく．ちなみに

$$dd^c = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}$$

である．

上で定めた $\bigoplus_{p,q} D^{p,q}(X)$ の微分作用素 d, d^c も，$\bigoplus_{p,q} A^{p,q}(X)$ の微分作用素 d, d^c と

$$[\cdot] : \bigoplus_{p,q} A^{p,q}(X) \hookrightarrow \bigoplus_{p,q} D^{p,q}(X)$$

に関して可換になっている．

微分形式では引き戻しが定義されたように，カレントについては押し出し（push-forward）が定義できる．すなわち，$\pi : X \to Y$ を コンパクト複素多様体の間の射として，$g \in D^{p,q}(X)$ とする．このときカレント g の押し出し $\pi_*(g) \in D^{p+\dim X - \dim Y, q+\dim X - \dim Y}$ が，$\pi_*(g)(\eta) = g(\pi^*\eta)$ で定まる．

定義 1.2.6 (グリーンカレント)**.** X をコンパクトケーラー多様体とし，$Z \subset X$ を，余次元 p のサイクルとする．カレント $g \in D^{p-1,p-1}(X)$ で

$$dd^c(g) + \delta_Z = [\omega]$$

となるような $\omega \in A^{p,p}(X)$ が存在するものを，Z **のグリーンカレント**（*Green current*）と呼ぶ．

次の例にゆく前に，C^∞-エルミート直線束について述べておこう．X をコンパクトケーラー多様体，L を X 上の直線束とする．L に C^∞-エルミート計量 h が入っているとは，各点 $x \in X$ に対して，エルミート計量

$$h_x : L_x \times L_x \longrightarrow \mathbb{C}$$

が定まっていて，x について C^∞ であることとする．このとき $\overline{L} = (L, h)$ を C^∞**-エルミート直線束** と呼ぶ．

例 1.2.7. X を非特異な複素射影代数多様体，$\overline{L} = (L, h)$ を C^∞-エルミート直線束，s を零でない L の有理切断とする．このとき，$-\log h(s,s)$ は局所可積分関数なので，$[-\log h(s,s)] \in D^{0,0}(X)$ であるが，$[-\log h(s,s)]$ は $\mathrm{div}(s)$ のグリーンカレントになる．実際，次に証明する Poincaré-Lelong の公式より

$$dd^c[-\log h(s,s)] + \delta_{\mathrm{div}(s)} = [c_1(\overline{L})]$$

となるからである（$c_1(\overline{L})$ は $\overline{L}$ の 第 1 チャーン形式）．

定理 1.2.8 (Poincaré-Lelong の公式)**.** X を非特異な複素射影代数多様体，$\overline{L} = (L, h)$ を C^∞-エルミート直線束，s を零でない L の有理切断とする．このとき，$D^{1,1}(X)$ 上で

$$dd^c[-\log h(s,s)] + \delta_{\mathrm{div}(s)} = [c_1(\overline{L})] \tag{1.2.8.1}$$

が成り立つ．

証明： X の次元を d とする．

ステップ 1　ここでは，$\operatorname{div}(s)$ の台が正規交叉（normal crossings）の因子と仮定して，定理を証明する． 任意の $p \in X$ に対して，p の局所近傍 $(U : z_1, \dots, z_d)$ をとって，$\operatorname{Supp}(\operatorname{div}(s))$ が局所的に $z_1 z_2 \cdots z_k = 0$ で定義されているとしてよい．1 の分割と線型性を用いることにより，(1.2.8.1) を示すには，任意のコンパクトな台をもつ $\eta \in A^{d-1,d-1}(U)$ に対して

$$\int_U \log|z_1|^2 \, dd^c\eta = \int_{z_1=0} \eta$$

が成り立つことを確めればよいことがわかる． さて

$$\int_U \log|z_1|^2 \, dd^c\eta = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|z_1| \le \epsilon} \log|z_1|^2 \, dd^c\eta$$

であり，Stokes の定理と付録の補題 A.1を用いれば

$$\begin{aligned}
\int_{|z_1|\le\epsilon} \log|z_1|^2 \, dd^c\eta &= \int_{|z_1|\le\epsilon} d\left(\log|z_1|^2 \, d^c\eta\right) - \int_{|z_1|\le\epsilon} d\log|z_1|^2 \wedge d^c\eta \\
&= -\int_{|z_1|=\epsilon} \log|z_1|^2 \, d^c\eta - \int_{|z_1|\le\epsilon} d\log|z_1|^2 \wedge d^c\eta \qquad \text{(Stokes)} \\
&= -\int_{|z_1|=\epsilon} \log|z_1|^2 \, d^c\eta + \int_{|z_1|\le\epsilon} d^c\log|z_1|^2 \wedge d\eta \qquad \text{(補題 A.1)} \\
&= -\int_{|z_1|=\epsilon} \log|z_1|^2 \, d^c\eta - \int_{|z_1|\le\epsilon} d\left(d^c\log|z_1|^2 \wedge \eta\right) + \int_{|z_1|\le\epsilon} dd^c\log|z_1|^2 \wedge \eta \\
&= -\int_{|z_1|=\epsilon} \log|z_1|^2 \, d^c\eta + \int_{|z_1|=\epsilon} d^c\log|z_1|^2 \wedge \eta \\
&\qquad\qquad + \int_{|z_1|\le\epsilon} dd^c\log|z_1|^2 \wedge \eta \qquad \text{(Stokes)}
\end{aligned}$$

となる． ここで $\epsilon \downarrow 0$ とすると，第 1 項は付録の補題 A.2 (i) より 0 に近づき，第 2 項は付録の補題 A.2 (ii) より $\int_{z_1=0} \eta$ に近づく． また $dd^c \log|z_1|^2 = 0$ であるから，第 3 項は 0 である． 従って

$$\int_U \log|z_1|^2 \, dd^c\eta = \int_{z_1=0} \eta$$

が示せた．

ステップ 2　一般の場合を考える．$D = \operatorname{div}(s)$ として，広中の特異点解消定理（[14]）を用いれば，固有写像 $\pi : \widetilde{X} \to X$ で

(i) $\widetilde{X}$ は非特異
(ii) $E = \pi^*(D)$ は正規交叉因子
(iii) $\pi|_{\widetilde{X} \setminus \operatorname{Supp}(E)} : \widetilde{X} \setminus \operatorname{Supp}(E) \to X \setminus \operatorname{Supp}(D)$ は同型

となるものが存在する．さて

$$\int_X -\log h(s,s)\, dd^c\eta = \int_{\widetilde{X}} -\log \pi^* h(\pi^* s, \pi^* s)\, dd^c(\pi^*\eta)$$
$$\int_X c_1(\overline{L}) \wedge \eta = \int_{\widetilde{X}} c_1(\pi^*\overline{L}) \wedge \pi^*\eta$$

である．また，D の strict transform を $\overline{D}$ として，$E = \overline{D} + E'$ とおけば，$\dim \pi_*(E') < \dim D$ であるから

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{div}(\pi^* s)} \pi^*\eta &= \int_{\overline{D}} \pi^*\eta + \int_{E'} \pi^*\eta \\ &= \int_D \eta = \int_{\mathrm{div}(s)} \eta\end{aligned}$$

であり，$\mathrm{div}(\pi^* s)$ は正規交叉因子である．従って，$\mathrm{div}(s)$ がはじめから正規交叉因子として(1.2.8.1) を示せば十分であることがわかったから，**ステップ 1** に帰着された． □

注意 1.2.9. 定理 1.2.8 の証明の最後の部分とも関連するが，$\pi : X \to Y$ をコンパクト複素多様体の間の射，Z を X のサイクルとするとき，$\pi_*(\delta_Z) = \delta_{\pi_*(Z)}$ が成立する．これは読者の演習問題とする．

グリーンカレントについての基本的な性質を述べよう．

補題 1.2.10 (カレントに対する dd^c-補題)**.** X をコンパクトケーラー多様体とする．$\eta \in D^{p,p}$ が d-完全であれば，ある $\gamma \in D^{p-1,p-1}(X)$ があって，$\eta = dd^c\gamma$ と書ける．

証明は [11, p149] を参照してほしい．[11, p149] では，微分形式に対する dd^c-補題を証明しているが，そこで出てくる $\partial, \overline{\partial}^*, G_{\overline{\partial}}$ 等は全てカレントに拡張されるので，同じ証明がカレントに対する dd^c-補題に通用する．

命題 1.2.11. X をコンパクトケーラー多様体とする．余次元 p の任意のサイクル Z に対して，Z のグリーンカレントが存在する．

証明：　Z のコホモロジー類を表す (p,p)-形式 ω をとれば，$\omega - \delta_Z$ は d-完全である．従って，dd^c-補題より $\omega - \delta_Z = dd^c g$ となるカレント $g \in D^{p-1,p-1}(X)$ が存在する． □

命題 1.2.12. X をコンパクトケーラー多様体，Z を余次元 p のサイクルとする．g_1, g_2 を Y のグリーンカレントとすると，$\eta \in A^{p,p}(X)$，$u \in D^{p-2,p-1}(X)$，$v \in D^{p-1,p-2}(X)$ が存在して，

$$g_1 - g_2 = [\eta] + \partial u + \overline{\partial} v$$

と書ける．

証明：

$$dd^c(g_1) + \delta_Y = [\omega_1] \quad (\omega_1 \in A^{p,p}(X))$$
$$dd^c(g_2) + \delta_Y = [\omega_2] \quad (\omega_2 \in A^{p,p}(X))$$

と書けば，

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}(g_1 - g_2) = [\omega_1 - \omega_2]$$

となる． よって，補題 1.2.13 から命題が従う． □

補題 1.2.13. X をコンパクトケーラー多様体とし，g を X 上の (p,q)-型のカレントとする．もし，$\partial\overline{\partial}g$ が C^∞ である（つまり，ある $\omega \in A^{p+1,q+1}(X)$ が存在して，$\partial\overline{\partial}g = [\omega]$ と書けている）とすれば，ある $\eta \in A^{p,q}(X)$，$u \in D^{p-1,q}(X)$，$v \in D^{p,q-1}(X)$ が存在して，

$$g = [\eta] + \partial u + \overline{\partial} v$$

と書ける．

証明： [11, p385] より，カレントの $d, \partial, \overline{\partial}$-コホモロジーは，$C^\infty$-微分形式の $d, \partial, \overline{\partial}$-コホモロジーに一致する．

C^∞ な ω があって，$\partial\overline{\partial}g = \omega$ ならば，$\omega = \partial(\overline{\partial}g)$ であるから，C^∞-形式 α があって，$\omega = \partial\alpha$ と書ける．すると $\partial(\overline{\partial}g - \alpha) = 0$ より，C^∞-形式 β と，カレント g_1 があって，$\overline{\partial}g - \alpha = \beta + \partial g_1$ と書ける．これから，$\partial\overline{\partial}g_1 = \overline{\partial}(\alpha+\beta)$ は C^∞ になる． ここで g_1 は $(p-1, q+1)$-型のカレントである．同じ操作を繰り返して，$(p-n, q+n)$-型のカレント g_n と C^∞ な α_n があって，

$$\overline{\partial}g_n = \alpha_n + \partial g_{n+1}$$

となる（$n \geq 1$）．

$n \geq p$ であれば, $g_{n+1} = 0$ であるから，$\overline{\partial}g_n = \alpha_n$ となる．α_n は C^∞ だから，ある C^∞ な η_n があって

$$g_n = \eta_n + \overline{\partial}v_n$$

と書ける． すると

$$\begin{aligned}\overline{\partial}(g_{n-1} + \partial v_n) &= \alpha_{n-1} + \partial g_n - \partial(g_n - \eta_n) \\ &= \alpha_{n-1} + \partial\eta_n\end{aligned}$$

は C^∞ なので，ある C^∞ な η_{n-1} があって

$$g_{n-1} = \eta_{n-1} + \partial u_{n-1} + \overline{\partial}v_{n-1}$$

と書ける． これを繰り返していけば

$$g = \eta + \partial u + \overline{\partial}v$$

で，η は C^∞ と書けることがわかる． □

次の命題は，Z が因子の時には，Z に対応するグリーンカレントは全て，例 1.2.7 でつくされていることを示している．

命題 1.2.14. X を非特異な複素射影代数多様体とする．D を X の因子として，g を D のグリーンカレントとする．このとき，直線束 $\mathcal{O}_X(D)$ の C^∞ なエルミート計量 h で

$$g = [-\log h(\mathbf{1}, \mathbf{1})]$$

となるものが存在する． ただし，$\mathbf{1}$ は $\mathcal{O}_X(D)$ の D に対応する切断，つまり $\mathcal{O}_X(D)$ を有理関数体に自然に埋め込んだときの有理関数 1 を表す．

証明： $\mathcal{O}_X(D)$ に勝手に C^∞ なエルミート計量 h' を入れる．例 1.2.7 より，$[-\log h'(\mathbf{1}, \mathbf{1})]$ は D のグリーンカレントである．D は因子だから，命題 1.2.12 から，ある C^∞ な関数 f が存在して，

$$g - [-\log h'(\mathbf{1}, \mathbf{1})] = [f]$$

と書ける．そこで，$h=\exp(-f)h'$ とおけば，$g=[-\log h(\mathbf{1},\mathbf{1})]$ となる． □

1.3. **算術的多様体，算術的 Chow 群.** まず算術的多様体や，その上の算術的サイクルなどを定義しよう．

定義 1.3.1 (算術的多様体)**.** $\mathbb{Z}$ 上擬射影的で平坦な整スキームを，**算術的多様体**（*arithmetic variety*）と呼ぶ．

$\mathcal{X}$ を射影的な算術的多様体で，$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ が正則なものとする（この講義ノートでは射影的な算術的多様体しか扱わない．また少なくともこの小節の終りまで，$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ は正則であるという仮定は置き続ける）．このとき，$\mathcal{X}(\mathbb{C})$ にはコンパクトな複素多様体の構造が入る．$F_\infty : \mathcal{X}(\mathbb{C}) \to \mathcal{X}(\mathbb{C})$ を複素共役とする．このとき

$$
\begin{aligned}
D^{p,p}(\mathcal{X}) &= \{T \in D^{p,p}(\mathcal{X}(\mathbb{C})) \mid T \text{ は real であり，} F_\infty^*(T) = (-1)^p T\}\\
A^{p,p}(\mathcal{X}) &= D^{p,p}(\mathcal{X}) \cap A^{p,p}(\mathcal{X}(\mathbb{C}))\\
\widetilde{A}^{p,p}(\mathcal{X}) &= A^{p,p}(\mathcal{X})/\{\mathrm{Image}(\partial) + \mathrm{Image}(\overline{\partial})\}
\end{aligned}
$$

とおく．

$\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ を余次元 p のサイクルとする．$g \in D^{p-1,p-1}(\mathcal{X})$ で，ある $\omega \in A^{p,p}(\mathcal{X})$ があって，

$$dd^c(g) + \delta_{\mathcal{Z}(\mathbb{C})} = [\omega]$$

となるものを，$\mathcal{Z}$ **のグリーンカレント** と呼ぶ．

また，対 $(\mathcal{Z}, g)$ で，$\mathcal{Z}$ は $\mathcal{X}$ の余次元 p のサイクル，$g \in D^{p-1,p-1}(\mathcal{X})$ は $\mathcal{Z}$ のグリーンカレントであるものを，余次元 p の **算術的サイクル**（*arithmetic cycle*）と呼ぶ．算術的サイクルの例として次のようなものがある．

例 1.3.2. $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ を余次元 $p-1$ の整な閉スキームとし，$f \in k(\mathcal{Y})^*$ を 零でない $\mathcal{Y}$ の関数体の元とする．このとき，$(\mathrm{div}(f), [-\log|f|^2])$ は $\mathcal{X}$ の余次元 p の算術的サイクルである．但し，ここで $\mathrm{div}(f)$ は f の因子である（$\mathcal{X}$ の余次元 p のサイクル）．また $[-\log|f|^2]$ は η を $\int_{\mathcal{Y}(\mathbb{C})}(-\log|f|^2)\,\eta$ にうつすカレント $D^{p-1,p-1}(\mathcal{X})$ の元である（正確には，積分は $\mathcal{Y}(\mathbb{C})$ を特異点解消したところで行う必要がある）．

例 1.3.3. $u \in D^{p-2,p-1}(X)$，$v \in D^{p-1,p-2}(X)$ に対して，$(0, \partial u + \overline{\partial} v)$ は $\mathcal{X}$ の余次元 p の算術的サイクルである．

定義が続くが

$$\widehat{Z}^p(\mathcal{X}) = \{\text{ 余次元 } p \text{ の算術的サイクル }\}$$

とおく．そして $\widehat{\mathrm{Rat}}^p(\mathcal{X})$ で，上の 2 つの例に出てくる算術的サイクルから生成される $\widehat{Z}^p(\mathcal{X})$ の部分加群としよう．つまり

$$\widehat{\mathrm{Rat}}^p(\mathcal{X}) = \left\langle (0, \partial u + \overline{\partial} v); (\mathrm{div}(f), [-\log|f|^2]) \mid f \in k(\mathcal{Y})^*, \mathrm{codim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = p \right\rangle$$

とおく．このとき

$$\widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}) = \widehat{Z}^p(\mathcal{X}) / \widehat{\mathrm{Rat}}^p(\mathcal{X})$$

とおいて，$\widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X})$ を，余次元 p の **算術的** *Chow* **群**（*arithmetic Chow group*）と呼ぶ．

次に，算術的多様体上の C^∞-エルミート直線束を定義しよう．$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ が $\mathcal{X}$ 上の C^∞-**エルミート直線束**（*C^∞-hermitian line bundle*）であるとは，$\mathcal{L}$ が $\mathcal{X}$ 上の直線束であって，h

が $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ の C^∞-エルミート計量で，複素共役 $F_\infty : \mathcal{X}(\mathbb{C}) \to \mathcal{X}(\mathbb{C})$ に関して不変なものとする．つまり，$x \in \mathcal{X}$ に対して，複素共役によって，$\mathcal{L}_x \xrightarrow{F_\infty} \mathcal{L}_{\overline{x}}$ が与えられるが，

$$h_{\overline{x}}(F_\infty s, F_\infty t) = \overline{h_x(s,t)}$$

が，任意の $s, t \in \mathcal{L}_x$ について成り立っているとする．

2 つの C^∞-エルミート直線束 $\overline{\mathcal{L}}_1 = (\mathcal{L}_1, h_1)$ と $\overline{\mathcal{L}}_2 = (\mathcal{L}_2, h_2)$ が同型であるとは，直線束の同型射 $\phi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ であって，$\phi_{\mathbb{C}} : (\mathcal{L}_{1\mathbb{C}}, h_1) \to (\mathcal{L}_{2\mathbb{C}}, h_2)$ が等長になるものが存在することとする．そして，$\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X})$ で，$\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束の同型類からなる群を表す.

さて，$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ が $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束，s を $\mathcal{L}$ の零でない有理切断とすれば，

$$(\mathrm{div}(s), [-\log h(s_{\mathbb{C}}, s_{\mathbb{C}})]) \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{X})$$

となる．$\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{X})$ の元としては，$(\mathrm{div}(s), [-\log h(s_{\mathbb{C}}, s_{\mathbb{C}})])$ は s の取り方によらない．そこで，この元を $\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})$ と書き，$\overline{\mathcal{L}}$ の**算術的第 1 チャーン類**（*arithmetic first Chern class* of $\overline{\mathcal{L}}$）と呼ぶ．小節 1.1 で約束していたように

命題 1.3.4.

$$\widehat{c}_1 : \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X}) \to \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{X})$$

は同型である．

証明： $\widehat{c}_1$ が全射になるところが問題であるが，それには，命題 1.2.14 を用いればよい． □

注意 1.3.5. §§2.3 でより一般に，C^∞-エルミートベクトル束 $\overline{\mathcal{E}}$ や算術的チャーン類 $\widehat{c}_i(\overline{\mathcal{E}})$ などが定義される．

$\widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X})$ と $\mathrm{CH}^p(\mathcal{X})$ の関係を調べよう．ここで

$$\mathrm{CH}^p(\mathcal{X}) = \frac{\{\mathcal{Z} \mid \mathrm{codim}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z} = p\}}{\langle \mathrm{div}(f) \mid f \in k(\mathcal{Y})^*, \mathrm{codim}_{\mathcal{X}} \mathcal{Y} = p-1 \rangle}$$

である．

命題 1.3.6. 次の完全列が存在する：

$$\widetilde{A}^{p-1,p-1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{a} \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}) \xrightarrow{z} \mathrm{CH}^p(\mathcal{X}) \longrightarrow 0.$$

ここで，$z(\mathcal{Z}, g) = \mathcal{Z}$, $a(\eta) = (0, \eta)$ である．

証明： z が全射であることは，命題 1.2.11 でやってある．$(0, g) \in \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X})$ としよう．すると，命題 1.2.12 より $\eta \in A^{p-1,p-1}(\mathcal{X})$, $u \in D^{p-2,p-1}(\mathcal{X})$，$v \in D^{p-1,p-2}(\mathcal{X})$ が存在して，$g = [\eta] + \partial u + \overline{\partial} v$ と書ける．従って，$a(\eta) = (0, \eta) = (0, g) \in \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X})$ となる． □

その他に，$(\mathcal{Z}, g)$ で $dd^c(g) + \delta_{\mathcal{Z}(\mathbb{C})} = [\omega]$ とおくとき，$(\mathcal{Z}, g)$ を ω に送る

$$\omega : \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}) \to A^{p,p}(\mathcal{X})$$

という射もある．例えば，$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束とすれば，$\omega(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})) = c_1(\overline{\mathcal{L}})$ となる（$c_1(\overline{\mathcal{L}})$ は $\overline{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}$ の第 1 チャーン形式）．

1.4. **算術的交叉理論.** Gillet と Soulé は次の定理を証明した（[8, Theorem 4.2.3] 参照）.

定理 1.4.1. $\mathcal{X}$ を正則で射影的な算術的多様体とする．このとき，任意の非負な整数 $p, q \geq 0$ に対して，可換で結合的な次数付きの双線型ペアリング

$$\widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}) \times \widehat{\mathrm{CH}}^q(\mathcal{X}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{CH}}^{p+q}(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

が存在する． そして，このペアリングによって，z や ω は 次数付き環の準同型になる．

注意 1.4.2. [8, Theorem 4.2.3] は，実はもっと強い主張で，例えば，$\mathcal{X}$ は擬射影的でよい．

この定理の証明は，ここではしないことにする．というのは，定理の証明の難しさに反して，応用上，エルミート直線束から決まる第 1 チャーン類との交叉で十分で，この場合，$\mathcal{X}$ の正則性は必要ない．

ただ $(\mathcal{Y}, g_{\mathcal{Y}}) \in \widehat{Z}^p(\mathcal{X})$，$(\mathcal{Z}, g_{\mathcal{Z}}) \in \widehat{Z}^q(\mathcal{X})$ としたときに，大まかに言って，このペアリングは

$$(\mathcal{Y}, g_{\mathcal{Y}}) \cdot (\mathcal{Z}, g_{\mathcal{Z}}) = (\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}, g_{\mathcal{Y}} * g_{\mathcal{Z}}) \tag{1.4.3}$$

で定められる． ただし，ここで $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$ は，サイクル $\mathcal{Y}$ と $\mathcal{Z}$ の交叉であり，$g_{\mathcal{Y}} * g_{\mathcal{Z}}$ は

$$g_{\mathcal{Y}} * g_{\mathcal{Z}} = \delta_{\mathcal{Y}(\mathbb{C})}\ g_{\mathcal{Z}} + g_{\mathcal{Y}}\ \omega(\mathcal{Z}, g_{\mathcal{Z}})$$

で与えられる $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$ のグリーンカレントである．

実際には (1.4.3) で定義する困難として，

(A) $\mathbb{Z}$ 上で Chow の moving lemma が知られていないので，$\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$ を定義することが難しい，
(B) $g_{\mathcal{Z}}$ はカレントなので，$\delta_{\mathcal{Y}(\mathbb{C})}\ g_{\mathcal{Z}}$ は一般には定義できない，

がある．

Gillet と Soulé は，(A) について，K-理論を用いて，$\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$ を，$\widehat{\mathrm{CH}}^{p+q}(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の中で定義できることを示した（ここで，$\otimes\mathbb{Q}$ が出てくる）．また (B) について，$\mathcal{Z}$ のグリーンカレント $g_{\mathcal{Z}}$ のうち，L^1-形式であって，$\mathcal{X}(\mathbb{C}) - \mathrm{Supp}(\mathcal{Z}(\mathbb{C}))$ では C^∞ であって，$\mathcal{Z}(\mathbb{C})$ に沿って対数的な特異点をもつものがとれることを示した．すると，$\delta_{\mathcal{Y}(\mathbb{C})} g_{\mathcal{Z}}(\eta) = \int_{\mathcal{Y}(\mathbb{C})} g_{\mathcal{Z}} \wedge \eta$ として，$\delta_{\mathcal{Y}(\mathbb{C})} g_{\mathcal{Z}}$ がカレントとして定義できる．

引き戻し（pull-back）や，押し出し（push-forward）について，次の定理が成り立つ．

定理 1.4.4. (i) $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ を正則な算術的多様体で，$\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を射とする．このとき，引き戻し

$$\pi^* : \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{Y}) \to \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

が存在する．π^* は a，z や ω と *compatible* で，$\pi^*(xy) = \pi^*(x)\pi^*(y)$ が成り立つ．

(ii) さらに，π が固有射で，$\pi_{\mathbb{C}} : \mathcal{X}(\mathbb{C}) \to \mathcal{Y}(\mathbb{C})$ がスムーズであれば，押し出し

$$\pi_* : \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{CH}}^{p-(\dim\mathcal{X} - \dim\mathcal{Y})}$$

で，a，z や ω と *compatible* なものが存在する．

証明： (i) の証明は，[8, 4.4.3] を見てほしい．(ii) の証明をしよう．$\mathcal{Z}$ を被約かつ既約として，$(\mathcal{Z}, g) \in \widehat{Z}^p(\mathcal{X})$ を考える．$\pi(\mathcal{Z})$ を集合としての $\mathcal{Z}$ の像として，

$$\pi_*(\mathcal{Z}) = \begin{cases} 0 & （\dim \pi(\mathcal{Z}) < \dim \mathcal{Z} \text{ のとき}） \\ \deg(\mathcal{Z} \to \pi(\mathcal{Z}))\ [\pi(\mathcal{Z})] & （\dim \pi(\mathcal{Z}) = \dim \mathcal{Z} \text{ のとき}）, \end{cases}$$

とおく．カレントの押し出しは定義されたから（§§1.2），$\pi_*(\mathcal{Z},g)=(\pi_*(\mathcal{Z}),\pi_{\mathbb{C}*}g)$ と定める．$dd^c(g)+\delta_{\mathcal{Z}(\mathbb{C})}=[\omega]$ とすると，$dd^c(\pi_{\mathbb{C}*}g)+\delta_{\pi(\mathcal{Z})(\mathbb{C})}=[\pi_{\mathbb{C}*}(\omega)]$ が確められる（注意 1.2.9参照）．ここで，$\pi_{\mathbb{C}*}(\omega)$ は，π に沿った積分であり，$\pi_{\mathbb{C}}:\mathcal{X}(\mathbb{C})\to\mathcal{Y}(\mathbb{C})$ がスムーズであるから，$\pi_{\mathbb{C}*}(\omega)$ は，C^∞ な微分形式である． □

この小節の最後に，C^∞-エルミート直線束との交叉を考えてみよう．ここでは，$\mathcal{X}$ は必ずしも正則でなくてよく，$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ が正則でありさえすればよい．$\overline{\mathcal{L}}=(\mathcal{L},h)$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束とする．s を L の零でない有理切断とするとき，$\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})$ は
$(\mathrm{div}(s),[-\log h(s_{\mathbb{C}},s_{\mathbb{C}})])$ で定義されたのだった．このとき

$$\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}):\widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X})\longrightarrow\widehat{\mathrm{CH}}^{p+1}(\mathcal{X})\qquad\alpha\mapsto\alpha\cdot\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})$$

を考えたいわけである.（この写像は，§§1.5 で拡張される.）上で述べた困難な点 (A) は s をうまく取り直せばよく，(B) はもともと $-\log h(s_{\mathbb{C}},s_{\mathbb{C}})$ は L^1-形式であって，$\mathrm{div}(s)$ に沿って対数的な特異点であるから，うまくいっている．つまり $\mathcal{Y}$ が被約かつ既約なときに，対 $(\mathcal{Y},g_{\mathcal{Y}})\in\widehat{Z}^p(\mathcal{X})$ に対して，$L|_{\mathcal{Y}}$ の零でない有理切断 s をとって，

$$(\mathcal{Y},g_{\mathcal{Y}})\cdot\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})=\left(\mathrm{div}(s),[-\log(h_{\mathcal{Y}})(s_{\mathbb{C}},s_{\mathbb{C}})]+c_1(\overline{\mathcal{L}})\wedge g_{\mathcal{Y}}\right)$$

として定義して，一般の $\mathcal{Y}$ に対しては線型性で広げればよい．ただし，$[-\log(h_{\mathcal{Y}})(s_{\mathbb{C}},s_{\mathbb{C}})]$ は

$$[-\log(h_{\mathcal{Y}})(s_{\mathbb{C}},s_{\mathbb{C}})](\eta)=\int_{\mathcal{Y}(\mathbb{C})}-\log(h_{\mathcal{Y}})(s_{\mathbb{C}},s_{\mathbb{C}})\eta$$

で与えられる $\mathcal{X}$ の (p,p)-型のカレントである．

1.5. 算術的 Chow 群の拡張と算術的サイクルの押し出し． 前小節の最後の定理で，押し出しを考えたが，そのためには，$\pi_{\mathbb{C}}$ がスムーズであることが必要であった．しかし，$\pi_{\mathbb{C}}$ がスムーズでないときにも押し出しを考えたいときがある．

そのため，算術的 Chow 群を少し拡張して，その中で押し出しが考えられるようにしよう（詳しくは [15] 参照）．

$\mathcal{X}$ を射影的な算術的多様体で，$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ が正則なものとする．対 $(\mathcal{Z},g)$ で，$\mathcal{Z}$ は $\mathcal{X}$ の余次元 p のサイクル，$g\in D^{p-1,p-1}(\mathcal{X})$ であるものを，余次元 p の **算術的** D**-サイクル**（*arithmetic D-cycle* of codim p）と呼ぶ．ちなみに，D は distribution の頭文字から来ている．算術的 D-サイクル全体からなる集合を $\widehat{\mathrm{CH}}^p_D(\mathcal{X})$ で表し，

$$\widehat{\mathrm{CH}}^p_D(\mathcal{X})=\widehat{Z}^p_D(\mathcal{X})/\widehat{\mathrm{Rat}}^p(\mathcal{X})$$

とおいて，$\widehat{\mathrm{CH}}^p_D(\mathcal{X})$ を，余次元 p の **算術的** D**-Chow 群**（*arithmetic D-Chow group*）と呼ぶ．

前小節と同様にして，C^∞-エルミート直線束との交叉を考えることができる．すなわち $\overline{\mathcal{L}}=(\mathcal{L},h)$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束とするとき

$$\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}):\widehat{\mathrm{CH}}^p_D(\mathcal{X})\longrightarrow\widehat{\mathrm{CH}}^{p+1}_D(\mathcal{X})\qquad\alpha\mapsto\alpha\cdot\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})$$

を, $\mathcal{Y}$ が被約かつ既約なときに，対 $(\mathcal{Y},g_{\mathcal{Y}})\in\widehat{Z}^p(\mathcal{X})$ に対して，$L|_{\mathcal{Y}}$ の零でない有理切断 s をとって，

$$(\mathcal{Y},g_{\mathcal{Y}})\cdot\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})=\left(\mathrm{div}(s),[-\log(h_{\mathcal{Y}})(s_{\mathbb{C}},s_{\mathbb{C}})]+c_1(\overline{\mathcal{L}})\wedge g_{\mathcal{Y}}\right)$$

として定義して，一般の $\mathcal{Y}$ に対しては線型性で広げて定義すればよい．

$\mathcal{X},\mathcal{Y}$ を射影的な算術的多様体で，$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}},\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}$ が正則なものとする．$\pi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ を射とする．$(\mathcal{Z},g)\in\widehat{Z}^p_D(\mathcal{X})$ に対して，押し出し $\pi_*(\mathcal{Z},g)$ を $(\pi_* Z,\pi_{\mathbb{C}*}g)$ で定義する．これは

$$\pi_*:\widehat{\mathrm{CH}}^p_D(\mathcal{X})\longrightarrow\widehat{\mathrm{CH}}^{p-(\dim\mathcal{X}-\dim\mathcal{Y})}_D$$

を導く．このとき次の射影公式（projection formula）が成り立つ．

命題 1.5.1. $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ を射影的な算術的多様体で，$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}},\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}$ が正則なものとする．$\pi:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ を射とする．$\overline{\mathcal{L}}=(\mathcal{L},h)$ を C^∞-エルミート直線束，$z\in\widehat{\mathrm{CH}}^p_D(\mathcal{X})$ とすれば，

$$\pi_*(\widehat{c}_1(\pi^*(\mathcal{L}),\pi^*h)\cdot z)=\widehat{c}_1(\mathcal{L},h)\cdot\pi_*(z).$$

が成り立つ．

証明：　$(\mathcal{Z},g)$ を z の代表元とする．$\mathcal{Z}$ は被約かつ既約として証明すれば十分である．$\mathcal{T}=\pi(\mathcal{Z})$ として $\phi=\pi|_{\mathcal{Z}}:\mathcal{Z}\to\mathcal{T}$ とおく．s を $\mathcal{L}|_{\mathcal{T}}$ の零でない有理切断とする．すると $\phi^*(s)$ は $\pi^*(\mathcal{L})|_{\mathcal{Z}}=\phi^*\left(\mathcal{L}|_{\mathcal{T}}\right)$ の元になる．従って，$\widehat{c}_1(\pi^*(\mathcal{L}),\pi^*h)\cdot z$ は

$$\left(\mathrm{div}(\phi^*(s)),[-\log\phi^*\left(h|_{\mathcal{T}}\right)(\phi^*(s),\phi^*(s))]+c_1(\pi^*(\mathcal{L}),\pi^*h)\wedge g\right),$$

で代表される．ここで，$[-\log\phi^*\left(h|_{\mathcal{T}}\right)(\phi^*(s),\phi^*(s))]$ は

$$[-\log\phi^*\left(h|_{\mathcal{T}}\right)(\phi^*(s),\phi^*(s))](\eta)=\int_{\mathcal{Z}(\mathbb{C})}\left(-\log\phi^*\left(h|_{\mathcal{T}}\right)(\phi^*(s),\phi^*(s))\right)\eta$$

で与えられるカレントである．

$$\deg(\phi)=\begin{cases}0 & （\dim\mathcal{T}<\dim\mathcal{Z}\text{ のとき}）\\ \deg(\mathcal{Z}\to\mathcal{T}) & （\dim\mathcal{T}=\dim\mathcal{Z}\text{ のとき}）\end{cases}$$

とおけば，$\mathcal{Y}(\mathbb{C})$ 上の C^∞-微分形式 η に対して

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{Z}(\mathbb{C})}\left(-\log\phi^*\left(h|_{\mathcal{T}}\right)(\phi^*(s),\phi^*(s))\right)\pi^*(\eta)&=\int_{\mathcal{Z}(\mathbb{C})}\phi^*\left(\left(-\log\left(h|_{\mathcal{T}}\right)(s,s)\right)\eta\right)\\&=\deg(\phi)\int_{\mathcal{T}(\mathbb{C})}\left(-\log\left(h|_{\mathcal{T}}\right)(s,s)\right)\eta\end{aligned}$$

となる．従って

$$\pi_*\left[-\log\phi^*\left(h|_{\mathcal{T}}\right)(\phi^*(s),\phi^*(s))\right]=\deg(\phi)\left[-\log\left(h|_{\mathcal{T}}\right)(s,s)\right]$$

であり，

$$\begin{aligned}\pi_*(\widehat{c}_1(\pi^*(\mathcal{L}),\pi^*h)\cdot z)&=\left(\deg(\phi)\,\mathrm{div}(s),\deg(\phi)\left[-\log\left(h|_{\mathcal{T}}\right)(s,s)\right]+c_1(\mathcal{L},h)\wedge\pi_*(g)\right)\\&=\widehat{c}_1(\mathcal{L},h)\cdot(\deg(\phi)T,\pi_*(g))=\widehat{c}_1(\mathcal{L},h)\cdot\pi_*(z)\end{aligned}$$

となる．従って命題が証明された．□

1.6. **算術的多様体の高さ.** $\mathcal{X}$ を $(d+1)$-次元の射影的な算術的多様体で，$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ が正則なものとする．このとき，

$$\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{CH}}^{d+1}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \left(\sum_{i=1}^{k} n_i P_i, g\right) \mapsto \sum_{i=1}^{k} n_i \log \#k(P_i) + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}(\mathbb{C})} g$$

で，degree 写像が定義できる． ただし，P_i は $\mathcal{X}$ の閉点であり，$g \in D^{d,d}(\mathcal{X})$ である．そこで，$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束とすれば，実数 $\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})$ が定まる．

$\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})$ は，実は $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ が正則でないときにも定義できることをみよう．そこで，$\mathcal{X}$ を必ずしも $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ が正則とは限らない $(d+1)$-次元の射影的な算術的多様体とする．

$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ を $\mathcal{X}$ 上の連続的なエルミート直線束とする．ここで “連続的” というのは，各点 $x \in \mathcal{X}(\mathbb{C})$ に対して，エルミート計量

$$h_x : L_x \times L_x \longrightarrow \mathbb{C}$$

が定まっていて，x について連続的であるという意味である（$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ が正則なときと同様，複素共役に関して不変の仮定も置いておく）．$\mathcal{X}(\mathbb{C})$ は少なくとも解析空間であるから，x について連続的であるということは意味をもつ．

任意の複素多様体 M と，任意の解析空間の写像 $\mu : M \to \mathcal{X}(\mathbb{C})$ に対して，$(\mu^*(\mathcal{L}_{\mathbb{C}}), \mu^* h)$ が C^∞ であるときに，$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ が C^∞ であると定義する．もちろん $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ が正則なときには，いままでの定義と一致する．以下では，$\overline{\mathcal{L}}$ は C^∞ であるとする．

$\pi : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ を算術的射影多様体の間の双有理写像で，$\widetilde{\mathcal{X}}_{\mathbb{Q}}$ が正則なものとしよう．このような $\pi : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ を $\mathcal{X}$ の **生成的特異点解消**（*generic resolution of singularities* of $\mathcal{X}$）と呼ぶ．広中の特異点解消定理より，任意の射影的な算術的多様体 $\mathcal{X}$ に対してその生成的特異点解消が存在する．すると $\pi^*(\overline{\mathcal{L}}) = (\pi^*(\mathcal{L}), \pi^* h)$ は C^∞-エルミート直線束であるから，$\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\pi^*(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}))$ が定まる．

2 つの生成的特異点解消 $\pi_1 : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}$ と，$\pi_2 : \mathcal{X}_2 \to \mathcal{X}$ が与えられれば，3 つめの生成的特異点解消

$$g : \mathcal{X}_3 \longrightarrow (\mathcal{X}_1 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}_2 \text{ の主要部分})$$

が考えられて，$i = 1, 2$ に対して，射影 $p_i : (\mathcal{X}_1 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}_2$ の主要部分$) \to \mathcal{X}_i$ とおけば，射影公式（命題 1.5.1）から

$$\widehat{\deg}(\widehat{c}_1((g \circ p_i \circ \pi_i)^*(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})) = \widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\pi_i^*(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}))$$

となる．従って $\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\pi^*(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}))$ の値は，生成的特異点解消の取り方によらないことがわかる．そこで

$$\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}) = \widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\pi^*(\overline{\mathcal{L}}))^{d+1})$$

と定める．

算術多様体の高さを定義しよう．$\mathcal{X}$ を $(d+1)$-次元の射影的な算術的多様体，$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束とする．後の都合上，構造射 $\pi : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ を Stein 分解して，$f : \mathcal{X} \to \Gamma$ で幾何学的生成ファイバー（geometric generic fiber）が連結になるものをとったときに，ある代数体 K の整数環 O_K を用いて，$\Gamma = \mathrm{Spec}(O_K)$ と書けていることを仮定する（例えば，$\mathcal{X}$ が正規ならよい）．

このとき

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(\mathcal{X}) = \frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})}{(d+1)\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{X}_{\mathbb{Q}})}$$

とおいて，**$\mathcal{X}$ の $\overline{\mathcal{L}}$ に関する高さ**と呼ぶ．ただし，$\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}) = (\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^d)$ である．より一般に，$\mathcal{Y}$ を $\mathcal{X}$ の 整な閉スキームで，$\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}$ が空でないとき，

$$h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(\mathcal{Y}) = \frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}|_{\mathcal{Y}})^{\dim \mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}+1})}{(\dim \mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}+1)\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}})}$$

とおいて，**$\mathcal{Y}$ の $(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})$ に関する高さ** と呼ぶ．ただし，$\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}) = c_1(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})^{\dim \mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}} \cap [\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}]$ である．さらに，Y を $\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ の部分代数多様体とするとき，$\mathcal{Y}$ を Y の $\mathcal{X}$ の中でのザリスキ閉包として，**Y の $(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})$ に関する高さ** を

$$h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(Y) = h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(\mathcal{Y})$$

で定める．

注意 1.6.1. $\dfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]}h_{\overline{\mathcal{L}}}(\mathcal{X})$ というように，$[K:\mathbb{Q}]$ で割ったものを，$\mathcal{X}$ の高さと定義することもある．

$\dim Y = 0$ つまり，Y が点 y の時には別に定義しなければいけない．このときは，Δ_y を y の $\mathcal{X}$ の中でのザリスキ閉包として，

$$h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(y) = \frac{\widehat{\deg}\left((\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})\big|_{\Delta_y}\right)}{[K(y):K]}$$

とおく．

このY の $(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})$ に関する高さは，ボゴモロフ予想（ウルモ・張の定理）の証明で，重要な役割を果たす． 先走ってしまうが，定理 5.5.1 は，おおざっぱに言って

$$\inf\{\mathcal{X}_{\mathbb{Q}} \text{ の十分一般的な点の高さ}\} \geq \mathcal{X} \text{ の高さ} \geq \inf\{\mathcal{X}_{\mathbb{Q}} \text{ の点の高さ}\}$$

が成り立つことを主張しており，この 3 つが一致するとき，同程度分布の定理が成り立つのである．

また，Y の高さは， $(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})$ （モデルという）によって定まるが，実際にはよいモデルがとれないこともある．こういう場合を扱うために，モデルの極限として交叉を定義するということを§4 で行う．

2. 算術的リーマン・ロッホの定理

2.1. **特性形式.** この小節では，特性形式について必要なことを証明抜きでまとめる．詳しくは，接続について書いてある微分幾何の教科書を参照してほしい．

X を d 次元複素多様体とし，E を X 上の階数が r の正則な複素ベクトル束とする．前節同様，$A^0(X)$（$C^\infty(X)$ とも書く）は X 上の C^∞-複素数値関数全体とする．$A^{p,q}(E)$（$A^{p,q}(X,E)$ とも書く）は E に値をもつ X 上の C^∞-(p,q) 次微分形式の全体の作る加群とする．$A^n(E) = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}(E)$ とおく．

E の接続 ∇ とは，$\mathbb{C}$-線型写像

$$\nabla : A^0(E) \longrightarrow A^1(E)$$

であって，任意の切断 $s \in A^0(E)$ と，任意の $f \in A^0(X)$ に対して，

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$$

を満たすものである．分解 $A^1(E) = A^{1,0}(E) \oplus A^{0,1}(E)$ は $\nabla = \nabla^{1,0} \oplus \nabla^{0,1}$ を導く．

さて，接続 ∇ はライプニッツの公式（Leibnitz rule）

$$\nabla(\theta \otimes s) = d\theta \otimes s + (-1)^k \theta \wedge \nabla s \qquad (\theta \in A^k(X), s \in A^0(E))$$

によって，共変外微分（covariant exterior differential）

$$\nabla : A^k(E) \longrightarrow A^{k+1}(E)$$

に拡張される． 曲率（curvature）は

$$\nabla^2 : A^0(E) \to A^2(E)$$

で定義される．∇^2 は $A^0(X)$-線型であることが確められるので，∇^2 を $A^2(E \otimes E^\vee)$ の元であると見なすことができる．

さて E にエルミート計量 h が入っている，つまり各点 $x \in X$ に対して，エルミート計量

$$h_x : E_x \times E_x \longrightarrow \mathbb{C}$$

が定まっていて，x について C^∞ であるとしよう．このとき $\overline{E} = (E, h)$ を C^∞-**エルミート正則ベクトル束** と呼ぶ．長い呼び方だが，C^∞ な計量の入った正則なベクトル束というつもりである．

このとき，E に次のように標準的に接続を定めることができる．

補題 2.1.1. C^∞-エルミート正則ベクトル束 $\overline{E} = (E, h)$ に対して，E の接続 $\nabla_{\overline{E}}$ を

(i) $\nabla_{\overline{E}}^{0,1} = \overline{\partial}_E$，ただし $\overline{\partial}_E$ はコーシー・リーマン作用素

(ii) $\nabla_{\overline{E}}$ はユニタリ，つまり

$$d\,h(s,t) = h(\nabla_{\overline{E}} s, t) + h(s, \nabla_{\overline{E}} t)$$

を満たすように定めることができる．

$\nabla_{\overline{E}}$ を $\overline{E}$ の**計量接続**（*metric connection*）と呼ぶ．このとき，$\nabla_{\overline{E}}^{0,2} = \overline{\partial}_E^2 = 0$ であり，$\nabla_{\overline{E}}$ がユニタリであることから，$\nabla_{\overline{E}}^{2,0} = 0$ となる．従って曲率 $\nabla_{\overline{E}}^2$ は $\nabla_{\overline{E}}^2 = \nabla_{\overline{E}}^{1,1} \in A^{1,1}(E \otimes E^\vee)$ となることに注意しておこう．

さて $\phi \in \mathbb{Q}[[T_1, \ldots, T_r]]$ を r 変数の対称な形式的巾級数とする．A を可換 $\mathbb{Q}$-代数 として，$M_n(A)$ で A-係数の (n, n) 行列全体を表すことにする．$\phi^{(k)}$ で ϕ の k 次部分を表せば，$\phi^{(k)}$ は多項式写像

$$\Phi^{(k)} : M_n(A) \longrightarrow A$$

で，1) $\Phi^{(k)}(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \phi^{(k)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$，2) $\Phi^{(k)}$ は共役不変（つまり，$P \in \mathrm{GL}_r(A)$ $M \in M_r(A)$ に対して $\Phi^{(k)}(PMP^{-1}) = \Phi^{(k)}(M)$）を満たすものを一意的に定める．

X 上の C^∞-エルミート正則ベクトル束 $\overline{E} = (E, h)$ に対して，微分形式 $\phi(\overline{E})$（$\phi(E, h)$ とも書く）を

$$\phi(\overline{E}) = \sum_{p \geq 0} \Phi^{(p)} \left(-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \nabla^2_{\overline{E}} \right) \in \bigoplus_{p \geq 0} A^{p,p}(X)$$

で定め，ϕ に付随した $\overline{E}$ の**特性形式**（*characteristic form*）と呼ぶ．

$\phi(E, h)$ は d-閉であり，別のエルミート計量 h' をとると，$\phi(E, h) - \phi(E, h')$ は d-完全であることが確められる．従って微分形式としては $\phi(\overline{E})$ は E のエルミート計量のとり方に依存するが，コホモロジーの元としては，$\phi(\overline{E})$ は E のみに依って定まる．

ϕ の典型的な例としては

- 第 k チャーン形式（k-th Chern form）　$c_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r} T_{i_1} \cdots T_{i_k}$
- 全チャーン形式（total Chern form）　$c = \sum_{k \geq 0} c_k$
- チャーン指標形式（Chern character form）　$\mathrm{ch}(T_1, \ldots, T_r) = \sum_{i=1}^r \exp(T_i)$
- トッド形式（Todd form）　$\mathrm{td}(T_1, \ldots, T_r) = \displaystyle\prod_{i=1}^r \frac{T_i}{(1 - \exp(-T_i))}$

がある．

2.2. **Bott-Chern の２次特性形式.** X を d 次元複素多様体とし，

$$\mathfrak{E} : 0 \to S \to E \to Q \to 0$$

を，X 上の正則ベクトル束の完全列とする．S，E，Q にはそれぞれ，C^∞-エルミート計量 h_S，h_E，h_Q が入っているものとする．$(\mathfrak{E}, h_S, h_E, h_Q)$ を簡単のため，$\overline{\mathfrak{E}}$ と書くことにする．また

$$\overline{\mathfrak{E}} : 0 \to \overline{S} \to \overline{E} \to \overline{Q} \to 0$$

とも書く（h_S は h_E の誘導計量とは限らないし，h_Q は h_E の商計量とは限らない）．

$\phi \in \mathbb{Q}[[T_1, \ldots, T_r]]$ を対称な形式的巾級数として，$\phi(\overline{E})$ と $\phi(\overline{S} \oplus \overline{Q})$ を考えてみよう．微分形式

$$\phi(\overline{S} \oplus \overline{Q}) - \phi(\overline{E})$$

は，一般には 0 ではないが，コホモロジーの元としては 0 になるので d-完全である．したがって，dd^c-補題から，ある $\eta \in \bigoplus_{p \geq 0} A^{p,p}(X)$ が存在して

$$\phi(\overline{S} \oplus \overline{Q}) - \phi(\overline{E}) = dd^c(\eta)$$

と書ける．これから述べる Bott-Chern 2 次特性形式の理論とは，上のような η の中で良いものが（モジュロー $\mathrm{Image}\, \partial + \mathrm{Image}\, \overline{\partial}$ で）とれることを示している．

$$\widetilde{A}^{p,p}(X) = A^{p,p}(X)/(\mathrm{Image}\,\partial + \mathrm{Image}\,\overline{\partial})$$

とおく．

定理 2.2.1 (Bott-Chern 2 次特性形式)**.** $\phi \in \mathbb{Q}[[T_1, \ldots, T_r]]$ を r-次の対称な形式的巾級数とする．このとき，任意の複素多様体 X と，X 上の C^∞-エルミート正則ベクトル束の短完全列

$$\overline{\mathfrak{E}} : 0 \to \overline{S} \to \overline{E} \to \overline{Q} \to 0$$

で $\mathrm{rk}\,E = r$ であるものに対して，微分形式 $\widetilde{\phi}(\overline{\mathfrak{E}}) \in \widetilde{A}^{p,p}(X)$ を，次の 3 条件を満たすように一意的に定めることができる；

(i) $\phi(\overline{S} \oplus \overline{Q}) - \phi(\overline{E}) = dd^c(\widetilde{\phi}(\overline{\mathfrak{E}}))$,

(ii) 複素多様体の任意の正則写像 $\pi : N \to M$ に対して，$\widetilde{\phi}(\pi^*(\overline{\mathfrak{E}})) = \pi^*\widetilde{\phi}(\overline{\mathfrak{E}})$,

(iii) $(E, h_E) = (S \oplus Q, h_S \oplus h_Q)$ のときは，$\widetilde{\phi}(\overline{\mathfrak{E}}) = 0$.

$\widetilde{\phi}(\overline{\mathfrak{E}}) \in \widetilde{A}^{p,p}(X)$ を $\overline{\mathfrak{E}}$ の Bott-Chern 2 次特性形式（Bott-Chern secondary characteristic form）と呼ぶ．

証明： まず，$\widetilde{\phi}(\overline{\mathfrak{E}})$ を構成しよう．$X \times \mathbb{P}^1$ を考え，$p_1 : X \times \mathbb{P}^1 \to X$，$p_2 : X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ をそれぞれ第 1，第 2 成分への射影とする．記号の乱用で，S，E，Q でそれぞれ $X \times \mathbb{P}^1$ 上のベクトル束 $p_1^*(S)$，$p_1^*(E)$，$p_1^*(Q)$ を表す．また，$\mathcal{O}(1)$ で $X \times \mathbb{P}^1$ 上の直線束 $p_2^*(\mathcal{O}(1))$ を表す．σ を $\mathcal{O}(1)$ の切断で，∞ で消えるものとする．$S(1) = S \otimes \mathcal{O}(1)$ として，$\mathrm{id} \otimes \sigma : S \to S(1)$ とおく．$\widetilde{E} = (E \oplus S(1))/S$ とすれば，$\widetilde{E} \to E/S = Q$ の核は $S(1)$ であるから，短完全列

$$\widetilde{\mathfrak{E}} : 0 \to S(1) \to \widetilde{E} \to Q \to 0$$

ができる．ここで $\widetilde{E}\Big|_{X \times \{0\}} \simeq E$，$\widetilde{E}\Big|_{X \times \{\infty\}} \simeq S \oplus Q$ である．さて，$\widetilde{h}$ を $\widetilde{E}$ の C^∞-エルミート計量で，

$$(\widetilde{E}, \widetilde{h})|_{X \times \{0\}} = (E, h_E) \qquad (\text{等長})$$

$$(\widetilde{E}, \widetilde{h})|_{X \times \{\infty\}} = (S \oplus Q, h_S \oplus h_Q) \qquad (\text{等長})$$

となるものとする．そして $\mathbb{P}^1$ の座標を z として，$\widetilde{\phi}(\overline{\mathfrak{E}})$ を

$$\widetilde{\phi}(\overline{\mathfrak{E}}) = -\int_{\mathbb{P}^1} \phi(\widetilde{E}, \widetilde{h})\ \log|z|^2$$

で定義する（$\int_{\mathbb{P}^1}$ は $p_1 : X \times \mathbb{P}^1 \to X$ のファイバーに沿った積分）．

これが，$\widetilde{h}$ のとり方によらないことを調べる必要があるが，その前に，(i) を満たすことを確めよう．$\phi(\widetilde{E}, \widetilde{h})$ は d-閉，d^c-閉であるから $w = 1/z$ とおいて，

$$\begin{aligned} dd^c\widetilde{\phi}(\overline{\mathfrak{E}}) &= -\int_{\mathbb{P}^1} dd^c\left(\phi(\widetilde{E}, \widetilde{h})\ \log|z|^2\right) \\ &= -\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|z|=\epsilon} \phi(\widetilde{E}, \widetilde{h})\ d^c \log|z|^2 + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|w|=\epsilon} \phi(\widetilde{E}, \widetilde{h})\ d^c \log|w|^2 \\ &= \phi(E, h_E) - \phi(S \oplus Q, h_S \oplus h_Q) \end{aligned}$$

となる．ただし，上で Stokes と，補題 A.2 (ii) を用いた．

次に，$\widetilde{\phi}(\mathfrak{E})$ が，$\widetilde{h}$ のとり方によらないことを確めよう．そこで，$\widetilde{h}'$ を

$$(\widetilde{E},\widetilde{h}')|_{X\times\{0\}} = (E,h_E) \qquad (\text{等長})$$
$$(\widetilde{E},\widetilde{h}')|_{X\times\{\infty\}} = (S\oplus Q, h_S\oplus h_Q) \qquad (\text{等長})$$

となる，別の C^∞-エルミート計量としよう．

$p_{12} : X\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \to X\times\mathbb{P}^1$ を $(1,2)$-成分への射影として，$\tilde{\widetilde{E}} = p_{12}^*(\widetilde{E})$ とおく．$X\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ の第 2 成分の $\mathbb{P}^1$ の座標を z，第 3 成分の $\mathbb{P}^1$ の座標を ζ とする．そして $\tilde{\widetilde{E}}$ の C^∞-エルミート計量 $\tilde{\widetilde{h}}$ を

$$\tilde{\widetilde{h}}|_{z=0} = h_E,\ \tilde{\widetilde{h}}|_{z=\infty} = h_S\oplus h_Q,\ \tilde{\widetilde{h}}|_{\zeta=0} = \widetilde{h},\ \tilde{\widetilde{h}}|_{\zeta=\infty} = \widetilde{h}'$$

を満たすようにとる．例えば，$\zeta = (\zeta_1:\zeta_2)$ として

$$\tilde{\widetilde{h}} = \frac{|\zeta_1|^2\widetilde{h} + |\zeta_2|^2\widetilde{h}'}{|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2}$$

とおけばよい．さて，(i) を

$$0 \to (\widetilde{E},\widetilde{h}) \to (\widetilde{E},\widetilde{h}') \to 0$$

に適用すれば

$$\phi(\widetilde{E},\widetilde{h}) - \phi(\widetilde{E},\widetilde{h}') = -\int_{\mathbb{P}^1} dd^c(\phi(\tilde{\widetilde{E}},\tilde{\widetilde{h}})\log|\zeta|^2)$$

となる．

したがって，　$\mathrm{Image}\,\partial + \mathrm{Image}\,\overline{\partial}$ をモジュローにして考えて，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{P}^1}\left(\phi(\widetilde{E},\widetilde{h}) - \phi(\widetilde{E},\widetilde{h}')\right)\ \log|z|^2 &= -\int_{\mathbb{P}^1}\int_{\mathbb{P}^1} dd^c(\phi(\tilde{\widetilde{E}},\tilde{\widetilde{h}})\log|\zeta|^2)\ \log|z|^2 \\
&\equiv -\int_{\mathbb{P}^1}\int_{\mathbb{P}^1} d\left(\phi(\tilde{\widetilde{E}},\tilde{\widetilde{h}})\log|\zeta|^2\ d^c\log|z|^2\right) \\
&= -\int_{|z|=\epsilon}\left(\int_{\mathbb{P}^1}\phi(\tilde{\widetilde{E}},\tilde{\widetilde{h}})\log|\zeta|^2\right) d^c\log|z|^2 \\
&\qquad + \int_{|w|=\epsilon}\left(\int_{\mathbb{P}^1}\phi(\tilde{\widetilde{E}},\tilde{\widetilde{h}})\log|\zeta|^2\right) d^c\log|z|^2 \\
&= -\left(\int_{\mathbb{P}^1}\phi(\tilde{\widetilde{E}},\tilde{\widetilde{h}})\log|\zeta|^2\right)_{z=0} + \left(\int_{\mathbb{P}^1}\phi(\tilde{\widetilde{E}},\tilde{\widetilde{h}})\log|\zeta|^2\right)_{z=\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる．ここで，3 番目の等式で，$w = 1/z$ であり，Stokes を用いている．4 番目の等式は，補題 A.2 (ii) を用いている．そして，最後の等式は，$\tilde{\widetilde{h}}|_{z=0} = h_E, \tilde{\widetilde{h}}|_{z=\infty} = h_S\oplus h_Q$ から従う．

次に一意性を確めよう．

$$\int_{\mathbb{P}^1} dd^c\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathfrak{E}})\cdot\log|z|^2$$

を2通りに計算する．まず，上の計算と同様なことをすれば，　$\mathrm{Image}\,\partial + \mathrm{Image}\,\overline{\partial}$ をモジュローにして考えて，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{P}^1} dd^c \widetilde{\phi}(\widetilde{\mathfrak{E}}) \cdot \log|z|^2 &\equiv \left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathfrak{E}})\right)_{z=0} - \left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathfrak{E}})\right)_{z=\infty} \\ &= \widetilde{\phi}(\overline{\mathfrak{E}})\end{aligned}$$

が成り立つ．一方 $\widetilde{\mathfrak{E}} : 0 \to S(1) \to \widetilde{E} \to Q \to 0$ に (i) を適用すれば，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{P}^1} dd^c \widetilde{\phi}(\widetilde{\mathfrak{E}}) \cdot \log|z|^2 &= \int_{\mathbb{P}^1} (\phi(\overline{S}(1)) - \phi(\widetilde{E}, \widetilde{h}) + \phi(\overline{Q})) \log|z|^2 \\ &= \phi(\overline{S}) \int_{\mathbb{P}^1} \phi(\overline{\mathcal{O}(1)}) \log|z|^2 - \int_{\mathbb{P}^1} \phi(\widetilde{E}, \widetilde{h}) \log|z|^2 \\ &\qquad + \phi(\overline{Q}) \int_{\mathbb{P}^1} \log|z|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

となる（ここで，第 1 項と第 3 項は，z を $1/z$ にすれば (-1) 倍になることから 0 となる）．従って，Bott-Chern 類は　$\mathrm{Image}\,\partial + \mathrm{Image}\,\overline{\partial}$ をモジュローにして一意的である．

定理の性質 (ii)，(iii) を確めるのは容易である． □

2.3. **算術的特性類.** $\mathcal{X}$ を正則な算術的多様体とする．$\overline{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, h)$ が $\mathcal{X}$ 上の C^∞-**エルミートベクトル束**（*C^∞-hermitian vector bundle*）であるとは，$\mathcal{E}$ が $\mathcal{X}$ 上のベクトル束であって，h が $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ の C^∞-エルミート計量で，複素共役に関して不変であるものである．

次の定理を述べる前に，§§1.3 で

$$\begin{aligned}a &: \widetilde{A}^{p-1,p-1}(\mathcal{X}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}) \qquad \eta \mapsto (0, \eta) \\ \omega &: \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}) \to A^{p,p}(\mathcal{X})\end{aligned}$$

という写像があったことを思いだしておこう．

定理 2.3.1 (算術的特性類). $\phi \in \mathbb{Q}[[T_1, \ldots, T_r]]$ を r-次の対称な形式的巾級数とする．このとき，任意の正則な算術的多様体 $\mathcal{X}$ と，$\mathcal{X}$ 上の階数が r の任意の C^∞-エルミートベクトル束 $\overline{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, h)$ に対して，次の 5 条件を満たすような

$$\widehat{\phi}(\overline{\mathcal{E}}) \in \bigoplus_{p \geq 0} \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

を一意的に定めることができる；

(i) 正則な算術的多様体の間の任意の射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ に対して，$f^*(\widehat{\phi}(\overline{\mathcal{E}})) = \widehat{\phi}(f^*(\overline{\mathcal{E}}))$，

(ii) $(\mathcal{E}, h)$ が C^∞-エルミート直線束の直和であれば，つまり $(\mathcal{E}, h) = (\mathcal{L}, h_1) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{L}, h_r)$ であれば，

$$\widehat{\phi}(\overline{\mathcal{E}}) = \phi(\widehat{c}_1(\mathcal{L}_1, h_1), \ldots, \widehat{c}_1(\mathcal{L}_r, h_r)),$$

(iii) $\omega(\widehat{\phi}(\overline{\mathcal{E}})) = \phi(\overline{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}})$，

(iv) $\overline{\mathfrak{E}} : 0 \to \overline{\mathcal{S}} \to \overline{\mathcal{E}} \to \overline{\mathcal{Q}} \to 0$ をエルミートベクトル束の短完全列とすれば，

$$\widehat{\phi}(\overline{\mathcal{S}} \oplus \overline{\mathcal{Q}}) - \widehat{\phi}(\overline{\mathcal{E}}) = a(\widetilde{\phi}(\overline{\mathfrak{E}}_{\mathbb{C}})),$$

(v) $\phi(T_1+T,\dots,T_r+T)=\sum_{i\geq 0}\phi_i(T_1,\dots,T_r)T^i$ と書くと，C^∞-エルミート直線束 $\overline{\mathcal{L}}$ に対して

$$\widehat{\phi}(\overline{\mathcal{E}}\otimes\overline{\mathcal{L}})=\sum_{i\geq 0}\widehat{\phi}(\overline{\mathcal{E}})\cdot\widehat{\phi}(\overline{\mathcal{L}})^i.$$

$\widehat{\phi}(\overline{\mathcal{E}})$ を**算術的特性類**（*arithmetic characteristic class*）と呼ぶ．証明は，例えば [26, IV] を見てほしい．

いくつか注意を述べておこう．(iv) の式に ω を作用させて，(iii) と，$\omega\circ a=dd^c$ に注意すると

$$\phi(\overline{\mathcal{S}}_{\mathbb{C}}\oplus\overline{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}})-\phi(\overline{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}})=dd^c(\widetilde{\phi}(\overline{\mathfrak{E}}_{\mathbb{C}}))$$

となるが，これは Bott-Chern 2 次特性形式の性質（定理 2.2.1 (ii)）に他ならない．また (iii) で C^∞-エルミート直線束 $\overline{\mathcal{L}}$ の場合を考えると，

$$\omega(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}))=c_1(\overline{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}})$$

となるが，これは Poincaré-Lelong の公式である．

ϕ として c_k， ch，td を取れば，それぞれ，算術的第 k チャーン類 $\widehat{c}_k(\overline{\mathcal{E}})$，算術的チャーン指標類 $\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{\mathcal{E}})$，算術的トッド類 $\widehat{\mathrm{td}}(\overline{\mathcal{E}})$ が定まる．

2.4. 解析的ねじれと Quillen 計量. (X,ω) を d-次元のケーラー多様体，$\overline{E}=(E,h)$ を C^∞-エルミート正則ベクトル束 とする．このとき，

$$\bigotimes_{q=0}^{d}\left(\det H^q(X,E)\right)^{(-1)^q}$$

に計量を入れることを考えよう．

Dolbeaut 複体

$$0\longrightarrow C^\infty(X,E)\xrightarrow{\overline{\partial}}A^{0,1}(X,E)\xrightarrow{\overline{\partial}}\cdots\xrightarrow{\overline{\partial}}A^{0,d}(X,E)\longrightarrow 0$$

について，$A^{0,q}(X,E)=C^\infty(X,\bigwedge^q(T^*X)\otimes E)$ であって，E には $\overline{E}$ からの計量が，T^*X にはケーラー形式 ω からの計量が入っている．そこで，$\bigwedge^q(T^*X)\otimes E$ に誘導される計量を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とおいて，$A^{0,q}(X,E)$ の L^2-計量を，

$$h_{L^2}(s,t)=\int_X\langle s(x),t(x)\rangle\frac{\omega^d}{d!}\qquad(s,t\in A^{0,q}(X,E))$$

で定める．

$A^{0,q}(X,E)$ の L^2-計量に関する，$\overline{\partial}$ の随伴作用素（adjoint operator）を $\overline{\partial}^*$ とし，$A^{0,q}(X,E)$ に作用するラプラス作用素 $\Box_q=\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*+\overline{\partial}^*\overline{\partial}$ をとれば，コホモロジー $H^q(X,E)$ は，調和形式のなす空間 $\mathcal{H}^q(X,E)=\operatorname{Ker}\Box_q$ と同一視できる．$A^{0,q}(X,E)$ の L^2-計量の制限によって，$\mathcal{H}^q(X,E)$ したがって $H^q(X,E)$ に計量が誘導されるから，$\bigotimes_{q=0}^d(\det H^q(X,E))^{(-1)^q}$ にも計量が入ることになる．これを L^2-計量と呼んで，h_{L^2} と書く．

$\bigotimes_{q=0}^d(\det H^q(X,E))^{(-1)^q}$ に別の計量を入れることもできる．ラプラス作用素 $\Box_q$ の（重複をこめた）正の固有値を $\sigma'(\Box_q)=\{\lambda_{q,1}\leq\lambda_{q,2}\leq\cdots\}$ とし，

$$\zeta_q(s)=\sum_{n\geq 1}\lambda_{q,n}^{-s}$$

を，スペクトル ζ-関数とする．このとき，$\zeta_q(s)$ は，$\Re(s) \gg 0$ で収束し，全平面に有理型関数として解析接続され，$s=0$ では極を持たないことが知られている．

定義 2.4.1 (解析的ねじれ)**.**

$$T(E,h) = \sum_{q\geq 0}(-1)^{q+1} q \zeta'_q(0)$$

を，(E,h) の **解析的ねじれ**（*analytic torsion*）と呼ぶ．

注意 2.4.2. もともとの Ray-Singer [22] によって定義された解析的ねじれは，$\exp(\frac{1}{2}T(E,h))$ である．

定義 2.4.3 (Quillen 計量)**.**

$$h_Q = h_{L^2} \cdot \exp T(E,h)$$

を，$\bigotimes_{q=0}^{d} (\det H^q(X,E))^{(-1)^q}$ の *Quillen* **計量**（*Quillen metric*）と呼ぶ．

天下り的に定義された Quillen 計量であるが，実は，‘ $\bigotimes_{q=0}^{d} (\det A^{0,q}(X,E))^{(-1)^q}$ ’ の L^2-計量に相当するものである（もちろん，$A^{0,q}(X,E)$ は無限次元だから，$\det A^{0,q}(X,E)$ は意味を持たないわけだが）．

このことを，おもちゃの場合（toy case）だが，有限次元ベクトル空間の場合で見てみよう．(V_q,h_q) を有限次元エルミート計量空間とし，

$$0 \longrightarrow V_0 \xrightarrow{d} V_1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} V_n \longrightarrow 0$$

を，ベクトル空間の複体（つまり，$d^2=0$ をみたす）とする．以下では $V_{-1}=0$，$V_{n+1}=0$ とおく．$d: V_q \to V_{q+1}$ の随伴作用素 $d^*: V_{q+1} \to V_q$ が，$h_{q+1}(dv,w) = h_q(v,d^*w)$ を満たすものとして定められる．そして，$\Box_q = dd^* + d^*d$ とおけば，$\Box_q$ は自己随伴な（self-adjoint）作用素になる．$\Box_q$ の固有値は非負な実数である．$\lambda \geq 0$ に対して，

$$E_q(\lambda) = \{v \in V_q \mid \Box_q(v) = \lambda v\}$$

とおく．特に，$\lambda=0$ のときには，$\mathcal{H}_q = E_q(0)$ とおく．

補題 2.4.4. $\lambda > 0$ とする．

(i) $d(E_{q-1}(\lambda)) \subset E_q(\lambda)$，$d^*(E_{q+1}(\lambda)) \subset E_q(\lambda)$ であって

$$0 \longrightarrow E_0(\lambda) \xrightarrow{d} E_1(\lambda) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} E_n(\lambda) \longrightarrow 0$$

は完全列である．したがって，$\mathcal{H}_q = \mathrm{Ker}(V_q \to V_{q+1}) / \mathrm{Image}(V_{q-1} \to V_q)$ となる．

(ii) $B_q(\lambda) = d(E_{q-1}(\lambda))$，$W_q(\lambda) = d^*(E_{q+1}(\lambda))$ とおけば，$E_q(\lambda) = B_q(\lambda) \oplus W_q(\lambda)$ となる．

(iii) $d: W_q(\lambda) \to B_{q+1}(\lambda)$ は同型である．

(iv) $w \in W_q(\lambda)$ とすると，$h_{q+1}(dw,dw) = \lambda h_q(w,w)$ が成り立つ．

証明は，いずれも易しいので省略する．さて，

$$b_q(\lambda) = \dim B_q(\lambda)$$
$$w_q(\lambda) = \dim W_q(\lambda)$$

とおく．もちろん，有限個の λ を除いて $b_q(\lambda) = w_q(\lambda) = 0$ である．

$\Box_q$ の（重複をこめた）正の固有値を $\sigma'(\Box_q) = \{\lambda_{q,1} \le \lambda_{q,2} \le \cdots\}$ とし，

$$\zeta_q(s) = \sum_{n \ge 1} \lambda_{q,n}^{-s}$$

とおく．そして，

$$T = \sum_{q \ge 0} (-1)^{q+1} q \zeta_q'(0)$$

とおく．

補題 2.4.5. $\exp(T) = \prod_{\lambda > 0} \lambda^{\sum_{q \ge 0} (-1)^{q+1} w_q(\lambda)}$

証明： $\zeta_q(s) = \sum_{\lambda > 0} \dfrac{b_q(\lambda) + w_q(\lambda)}{\lambda^s}$ であるから，

$$\zeta_q'(0) = \sum_{\lambda > 0} (b_q(\lambda) + w_q(\lambda))(-\log \lambda) = \log \prod_{\lambda > 0} \lambda^{-b_q(\lambda) - w_q(\lambda)}$$

となる．したがって

$$\exp(T) = \prod_{\lambda > 0} \lambda^{\sum_{q \ge 0} (-1)^{q+1} q(-b_q(\lambda) - w_q(\lambda))}$$

である．ここで，補題 2.4.4 (iii) より $b_{q+1}(\lambda) = w_q(\lambda)$ であるから，上の式で $b_q(\lambda)$ を消去すれば，求めたい式を得る． □

さて，補題 2.4.4 (i) より，$\bigotimes_{q=0}^n (\det E_q(\lambda))^{(-1)^q}$ は標準的（canonical）に $\mathbb{C}$ と同型である．この標準的な同型を

$$f_q : \mathbb{C} \to \bigotimes_{q=0}^n (\det E_q(\lambda))^{(-1)^q}$$

と書こう．V_q からの制限計量によって，$E_q(\lambda)$ は計量空間になるから，$\bigotimes_{q=0}^n (\det E_q(\lambda))^{(-1)^q}$ にも計量 h が入る．$\mathbb{C}$ には標準的な計量を入れれば，f_q のノルム $\|f_q\|$ は，補題 2.4.4 (ii), (iii)，(iv) より，

$$\|f_q\|^2 = h(f_q(1), f_q(1)) = \lambda^{\sum_{q \ge 0} (-1)^{q+1} w_q(\lambda)}$$

となる．したがって，補題 2.4.5 から次の命題が成り立つ．

命題 2.4.6. $\bigotimes_{q=0}^n (\det \mathcal{H}_q)^{(-1)^q}$ と $\bigotimes_{q=0}^n (\det V_q)^{(-1)^q}$ は，標準的に同型である．この空間を $\lambda(V)$ とおこう．V_q からの制限計量によって $\mathcal{H}_q$ は計量空間になり，この計量から誘導される $\lambda(V) = \bigotimes_{q=0}^n (\det \mathcal{H}_q)^{(-1)^q}$ の計量を h_{L^2} と書く．一方 V_q の計量から，同型 $\lambda(V) = \bigotimes_{q=0}^n (\det V_q)^{(-1)^q}$ によって誘導される $\lambda(V)$ の計量を h_Q と書く．このとき，

$$h_Q = h_{L^2} \cdot \exp(T)$$

が成り立つ．

さて，X をネータースキーム，F を X 上の連接層とするとき，直線束 $\det F$ を定義することができる．一般の場合は [17] に譲るが，X が正則なときには，次のように定められる．F の階数を r とする．T を F のねじれ部分（torsion part）として，

$$D = \sum_{P \in X, \mathrm{depth}(P)=1} \mathrm{length}(T_P) \cdot \overline{\{P\}}$$

とおいて，$\det(T) = \mathcal{O}_X(D)$ とおく．また $\det(F/T) = \left(\bigwedge^{\mathrm{rk}(F)}(F/T)\right)^{**}$ とおく．このとき $\det F = \det(T) \otimes \det(F/T)$ で定められるのである．

さて $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ を正則な算術的多様体，$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を射影的な射で，$f_{\mathbb{C}} : \mathcal{X}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ がスムーズなものとする．$\mathcal{E}$ を $\mathcal{X}$ 上のベクトル束とする．このとき，行列式束（deteminant line bundle）

$$\det \mathbf{R} f_*(\mathcal{E}) = \bigotimes_{q \geq 0} \left(\det R^q f_*(\mathcal{E})\right)^{(-1)^q}$$

が定まる．

さて，$\overline{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, h)$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-ベクトル束とする．このとき，$\det \mathbf{R} f_*(\mathcal{E})$ にエルミート計量を与えることを考えよう．

そのため，相対接束 $T_{\mathcal{X}_{\mathbb{C}}/\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}} = \mathrm{Ker}(T\mathcal{X}_{\mathbb{C}} \to f^*(T\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}))$ のエルミート計量 h_f で，複素共役に関して不変であり，$y \in \mathcal{Y}(\mathbb{C})$ に沿って C^∞ になっているものをとる．さらに，任意の $y \in \mathcal{Y}(\mathbb{C})$ に対して $h_y|_{X_y}$ がケーラー計量になっていると仮定する．

$y \in \mathcal{Y}(\mathbb{C})$ について，

$$\det \mathbf{R} f_*(\mathcal{E})_y = \bigotimes_{q \geq 0} \left(\det H^q(X_y, E_y)\right)^{(-1)^q}$$

であるから，$\bigotimes_{q \geq 0} \left(\det H^q(X_y, E_y)\right)^{(-1)^q}$ には，L^2-計量 $h_{L^2,y}$，および Quillen 計量 $h_{Q,y}$ が入る．したがって，$\det \mathbf{R} f_*(\mathcal{E})$ に L^2-計量 $h_{L^2} = \{h_{L^2,y}\}_{y \in \mathcal{Y}(\mathbb{C})}$，および Quillen 計量 $h_Q = \{h_{Q,y}\}_{y \in \mathcal{Y}(\mathbb{C})}$ が定められる．

Bismut，Gillet と Soulé は，次の定理を証明した（[3, Corollary 3.9]）.

定理 2.4.7. *Quillen* 計量 h_Q は $y \in \mathcal{Y}(\mathbb{C})$ に関して，C^∞ である．

証明は [3, Corollary 3.9]， または [26, VI] を見てほしい．

2.5. **算術的リーマン・ロッホの定理.** $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ を正則な算術的多様体，$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を射影的な射で，$f_{\mathbb{C}} : \mathcal{X}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ がスムーズなものとする．

相対接層 $T_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} = \mathrm{Ker}(T\mathcal{X} \to f^*(T\mathcal{Y}))$ を考え，$T_{\mathcal{X}_{\mathbb{C}}/\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}}$ の複素共役に関して不変なエルミート計量 h_f で，$y \in \mathcal{Y}(\mathbb{C})$ に沿って C^∞ で，任意の $y \in \mathcal{Y}(\mathbb{C})$ に対して $h_y|_{X_y}$ がケーラー計量になっているものをとる．

$T_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ は連接層であって，一般にはベクトル束ではないが，このときにも算術的 Todd 類 $\widehat{\mathrm{td}}(\overline{T_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}}) \in \bigoplus_{p \geq 0} \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X})$ を定めることができる（例えば，[26, VIII, 1.1] 参照）.

さて $\zeta(s)$ をリーマンゼータ関数，$\zeta'(s)$ をその微分として，形式的巾級数

$$R(T) = \sum_{m:\mathrm{odd}, m \geq 1} \left(2\zeta'(s) + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right)\zeta(-m)\right) \frac{T^m}{m!}$$

を考える．$R(T_1,\dots,T_r) = R(T_1)+\cdots+R(T_r)$ とおけば，これは r 次の対称な $\mathbb{R}$-係数の形式的巾級数である．このとき任意の複素多様体 X と，階数 r の任意の C^∞-エルミートベクトル束 $\overline{E}=(E,h)$ に対して，特性形式 $R(\overline{E}) \in \bigoplus_{p\geq 0} A^{p,p}(X)$ が §§ 2.1 によって定まる（§§ 2.1 では $\mathbb{Q}$-係数の形式的巾級数を扱ったが，$\mathbb{R}$-係数でも何ら変わりない）.

算術的多様体の場合に戻って

$$\widehat{\mathrm{td}}^R(\overline{T_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}}) = \widehat{\mathrm{td}}(\overline{T_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}}) \cdot \left(1 - a\left(R(\overline{T_{\mathcal{X}_{\mathbb{C}}/\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}}})\right)\right) \in \bigoplus_{p\geq 0} \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

とおく.

定理 2.5.1 (算術的リーマン・ロッホの定理)**.** $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ を正則な算術的多様体，$f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ を射影的な射で，$f_{\mathbb{C}}:\mathcal{X}_{\mathbb{C}}\to\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ がスムーズなものとする．相対接層 $T_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ の複素共役不変なエルミート計量 h_f で，$y\in\mathcal{Y}(\mathbb{C})$ に沿って C^∞ で，任意の $y\in\mathcal{Y}(\mathbb{C})$ に対して $h_y|_{X_y}$ がケーラー計量になっているものをとって固定する．

このとき，$\mathcal{X}$ 上の任意の C^∞-エルミートベクトル束 $\overline{\mathcal{E}}=(\mathcal{E},h)$ に対して，$\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{Y})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 上の等式

$$\hat{c}_1(\det \mathbf{R} f_*(\mathcal{E}), h_Q) = f_*\left(\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{\mathcal{E}}) \cdot \widehat{\mathrm{td}}^R(\overline{T_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}})\right)^{(1)} \tag{2.5.1.1}$$

が成り立つ.

証明は [26, VIII] または [10, Theorem 7] を見てほしい.

[10, Theorem 7] ではより強く，$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ の正則性の仮定をゆるめている．すなわち，$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ を算術的多様体で $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$，$\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}$ が正則なものとし，$f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ を射影的な射で，$f_{\mathbb{C}}:\mathcal{X}_{\mathbb{C}}\to\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ がスムーズなものとする．もし (i) f が局所完全交叉（locally complete intersection），あるいは (ii) $\mathcal{Y}$ は正則，であれば (2.5.1.1) が成り立つ.

また，(2.5.1.1) はリーマン・ロッホの等式の 1 次の部分の等式であるが，高次の部分を含めたリーマン・ロッホの等式については，$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ が正則であるという仮定のもとで，Faltings が証明している（[6]）.

3. 小さな切断の存在

この節では，算術的 Hilbert-Samuel の定理（定理 3.3.1）とその系として小さな切断の存在（系 3.3.2）を証明する．前節までと異なり，なるべく証明をつけることを心掛けた．算術的リーマン・ロッホの定理 (定理 2.5.1)，解析的ねじれの評価（命題 3.5.3）とミンコフスキの凸体定理（定理 3.2.2）を除けば，あとは証明がついていると思う．

この節では，エルミート直線束を $(\mathcal{L}, h)$ と書く他に，$(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ とも書く．ここで $\|\cdot\| = \sqrt{h(\cdot,\cdot)}$ である．

3.1. **小さな切断.** X を正規な複素代数多様体とし，L を X 上の直線束としよう．もし L が切断 $s \in H^0(M, L)$ をもてば，$\mathrm{div}(s)$ は有効な（effective）因子となる．

今度は $\mathcal{X}$ を算術的多様体とし，$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束としよう．このとき上の場合の切断に対応するものは何であろうか．$\widehat{\mathrm{div}}(s)$ が $(\mathrm{div}(s), [-\log\|s\|^2])$ で与えられたことを思い出せば，切断 $s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ であって，$-\log\|s\|^2$ になんらかの positivity を持っているものが対応するのは自然だろう．

定義 3.1.1 (小さな切断)**.** $\mathcal{X}$ を算術的多様体とし，$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ を，$\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束とする．$\mathcal{L}$ の切断 $s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ で $\|s\|_{\sup} < 1$ であるものを $\mathcal{L}$ の **小さな切断**（*small section*）という．ただし，$\|s\|_{\sup} = \sup\{\|s\|(x) \mid x \in \mathcal{X}(\mathbb{C})\}$ である．

注意 3.1.2. $\|s\|_{\sup} < 1$ という条件の代わりに，$\|s\|_{\sup} \le 1$ とか，§3.2 で出てくる L^2-ノルムに関して，$\|s\|_{L^2} < 1$ や $\|s\|_{L^2} \le 1$ という条件を課したものも，小さな切断と呼ぶことがある．しかし，この講義ノートでは $\|s\|_{\sup} < 1$ をみたすものを小さな切断と呼ぶことにする．

さて，X を次元が d の複素射影的代数多様体とし L，N を X 上の直線束とする．Hilbert-Samuel の定理（弱い形のリーマン・ロッホの定理）とは

$$\chi(X, L^{\otimes n} \otimes N) = \frac{\deg(L^d)}{n!} n^d + O(n^{d-1})$$

であった（詳しくは，例えば [16]）．さらに，L がネフで，かつ $\deg(L^d) > 0$ であれば，Hilbert-Samuel の定理と小平の消滅定理を用いて，十分大きな n に対して $L^{\otimes n}$ が零でない切断をもつ．

このことの算術的な場合を考えるのが，この節の目的である．正確な形は，定理 3.3.1とその系 3.3.2を見てほしい．系 3.3.2は §5 で必要になる．

定理 3.3.1 を述べる前に，まず算術的なオイラー標数を定義しよう．

3.2. **算術的オイラー標数.** $(V, \|\cdot\|)$ を b 次元実ノルム空間とし，Γ を V の格子（つまり Γ は V の疎な $\mathbb{Z}$-加群で，$\mathbb{R}$ 上 V を生成するもの）とする．

Γ の $\mathbb{Z}$-基底 $v_1, \ldots, v_b$ をひとつ固定して，基本領域 V/Γ を

$$V/\Gamma = \{v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_b v_b \mid 0 \le \lambda_i \le 1 \ (1 \le i \le b)\}$$

で定める．

V にルベーグ測度 μ を次のように入れる．ベクトル空間の同型 $\phi : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^b$ をひとつ固定して，$\mathbb{R}^b$ のルベーグ測度から誘導される測度を μ とおくのである．別の同型 ϕ' をとれば，別の測度 μ' が誘導されるが，μ と μ' は定数倍しか異ならない．従って，$B(V) = \{x \in V \mid \|x\| \le 1\}$ を閉単位球として

$$\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\Gamma) = \frac{\mu(V/\Gamma)}{\mu(B(V))}$$

とおけば，この値は μ の取り方に依らない． また，この値が V/Γ の定義に現われる Γ の $\mathbb{Z}$-基底の取り方にも依存しないことが容易にわかる．

さらに，

$$\chi_{\|\cdot\|}(\Gamma) = -\log \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\Gamma)$$

とおく． 天下り的な定義であるが， 後で出てくるように，$(V, \|\cdot\|)$ と Γ が，算術的多様体とその上の C^∞-エルミート直線束から定まる場合には，これを算術的オイラー標数と呼ぶのである．

ここでついでに，後で使うミンコフスキの凸体定理について述べておく．まず，逐次最小（successive minima）について述べる．

定義 3.2.1 (逐次最小)**.** b 次元実ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ と格子 Γ に対して，Γ の b 個の一次独立な点 $v_1, \ldots, v_b$ と b 個の正の数 $\lambda_1(\Gamma), \ldots, \lambda_b(\Gamma)$ で次の性質を満たすものが存在する：

(i) $\|v_i\| = \lambda_i(\Gamma)$ $(1 \leq i \leq b)$，

(ii) $\lambda_1(\Gamma) \leq \lambda_2(\Gamma) \leq \cdots \leq \lambda_b(\Gamma)$，

(iii) $1 \leq b' \leq b$ で，Γ の元 $v \neq 0$ が $v_1, \ldots, v_{b'-1}$ に関して一次独立であれば，$\|v\| \geq \lambda_{b'}(\Gamma)$．

$\lambda_1(\Gamma), \ldots, \lambda_b(\Gamma)$ は，$(V, \|\cdot\|)$ と Γ だけに関係して一意に定まる．$\lambda_1(\Gamma), \ldots, \lambda_b(\Gamma)$ を Γ での $B(V)$ の**逐次最小**（*successive minima*）と呼ぶ．

定理 3.2.2 (ミンコフスキの凸体定理)**.** $(V, \|\cdot\|)$ を b 次元実ノルム空間とし，Γ を V の格子とする． このとき

$$\frac{2^b}{b!}\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\Gamma) \leq \lambda_1(\Gamma)\cdot\cdots\cdot\lambda_b(\Gamma) \leq 2^b \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\Gamma)$$

が成り立つ．

証明は，例えば [12] を参照してほしい（ノルム空間の閉単位球 $B(V)$ は原点に関して対称かつ有界な閉凸体である）．

さて，$\mathcal{X}$ を射影的な算術的多様体とし，$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束とする．また $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ は正則であるとする．このとき，$H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ は 有限 $\mathbb{Z}$-加群になる（例えば [13, Theorem 8.8 (b)] 参照）．また $\mathcal{X}$ は $\mathbb{Z}$ 上平坦であってので，$H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ は，ねじれ元を持たない．そこで $V = H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおいて，自然な包含写像 $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の像を Γ とすれば，Γ は V の格子である（以下では，Γ とその像を同一視して，$\Gamma = H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ と書く）．

V にノルムを入れよう．$\mathcal{X}(\mathbb{C})$ の体積要素 dx をひとつ固定する．$F_\infty : \mathcal{X}(\mathbb{C}) \to \mathcal{X}(\mathbb{C})$ を複素共役とする．

$$\begin{aligned} V &= H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \\ &= H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \text{ の } F_\infty\text{-不変部分} \\ &= H^0(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}}) \text{ の } F_\infty\text{-不変部分} \\ &\subset H^0(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}}) \end{aligned}$$

によって，V は $H^0(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}})$ の $\mathbb{R}$-部分ベクトル空間と見なせる． ここで $H^0(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}})$ には $\overline{\mathcal{L}}$ のエルミート計量が入っている．

(i) V の L^p-ノルム（$1 \le p < \infty$）を，$s \in V$ に対して

$$\|s\|_{L^p} = \left\{ \int_{\mathcal{X}(\mathbb{C})} \|s\|^p(x)dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

で定める．ここで s は上の包含写像によって $H^0(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}})$ の元と見なしている．

(ii) V の sup-ノルムを，$s \in V$ に対して

$$\|s\|_{\sup} = \sup_{x \in \mathcal{X}(\mathbb{C})} \|s\|(x)$$

で定める．

こうして，それぞれのノルムに応じて $\chi_{\|\cdot\|_{L^p}}(H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}))$ や $\chi_{\|\cdot\|_{\sup}}(H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}))$ が定まる．これらを，それぞれ L^p-ノルムに関する，または sup-ノルムに関する**算術的オイラー標数**（*arithmetic Euler characteristic*）と呼んで，$\chi_{L^p}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})$，$\chi_{\sup}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})$ と書く．

この講義ノートで使うのは L^2-ノルムと sup-ノルムだけである．また L^p-ノルムは，体積要素 dx をひとつ固定した上で定義されていたが，$\overline{\mathcal{L}}$ のチャーン形式 $c_1(\overline{\mathcal{L}})$ が $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ の各点で正なときには $dx = \dfrac{c_1(\overline{\mathcal{L}})^{\wedge d}}{(\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^d)}$ という標準的な体積要素をとることができることに注意しておく（d は $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$ の次元）．

簡単な場合だが，$\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ のときに，算術的オイラー標数がどうなるかを考えてみる．$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ を $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上のエルミート直線束とする．$\mathcal{L}$ は 階数 1 の自由 $\mathbb{Z}$- 加群だから，その $\mathbb{Z}$-基底 e をとる．今の場合，$X_{\mathbb{C}}$ は一点なので，L^p-ノルムも sup-ノルムもすべて同じで（だから以下では添字を書かない）

$$\chi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}) = -\log \frac{\sqrt{h(e,e)}}{2} = -\frac{1}{2}\log h(e,e) + \log 2$$

となる．$\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{can} = (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, |\cdot|)$ とおけば（$|\cdot|$ は普通の絶対値），$\chi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{can}) = \log 2$ であり，また $-\frac{1}{2}\log h(e,e) = \widehat{\deg}(\overline{\mathcal{L}})$ であった（§ 1.1）から，上の式は

$$\chi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}) - \chi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{can}) = \widehat{\deg}(\overline{\mathcal{L}}) \tag{3.2.2.1}$$

となる． より一般に，K を代数体，O_K をその整数環として，$\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(O_K)$ のときも (3.2.2.1) は成り立つ．やや大げさだが，(3.2.2.1) を算術的曲線の場合のリーマン・ロッホの定理だと思えば，$\chi(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})$ を算術的オイラー標数と呼ぶのもうなずけるかもしれない．

3.3. 算術的 Hilbert-Samuel の定理と小さな切断の存在. 算術的 Hilbert-Samuel の定理を述べる前に，特異点をもった多様体の上のエルミート直線束の C^∞，半正，正についての言葉を用意する．

M を被約な解析空間，$\overline{L} = (L, h)$ を M 上の連続的なエルミート直線束とする．§§1.6 と重複するが，$\overline{L}$ が C^∞ であるとは，任意の複素多様体 N と任意の解析的写像 $\phi : N \to M$ に対して，$\phi^*(\overline{L})$ が C^∞ になるときにいう．M 上の連続関数についても，同様に C^∞ が定義される．ここで，$\overline{L}$ を C^∞ なエルミート直線束とする．$c_1(\overline{L})$ が**半正**（*semipositive*）であるとは，任意の複素多様体 N と任意の解析的写像 $\phi : N \to M$ に対して，チャーン形式 $c_1(\phi^*(\overline{L}))$ が半正になるときにいう．さらに，$c_1(\overline{L})$ が**正**（*positive*）であるとは，任意の $x \in M$ と任意の x の近傍で定義された C^∞ な実数値関数 f に対して，ある $\lambda_0 > 0$ が存在して，$|\lambda| \le \lambda_0$

となる任意の λ について，$\lambda dd^c(f)+c_1(\overline{L})$ が x の近傍で半正になるときにいう．M が非特異なとき，半正，正は，普通の意味の半正，正と一致する．

$f:\mathcal{X}\to\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ を射影的な算術的多様体，$\overline{\mathcal{L}}=(\mathcal{L},h)$ を C^∞-エルミート直線束とする．C^∞-エルミート直線束 $\overline{\mathcal{L}}$ は

(i) $f(C)$ が一点になるような，$\mathcal{X}$ の任意の 1 次元整スキーム C に対して

$$\deg(\mathcal{L}|_C)\geq 0$$

となる（つまりファイバーに沿ってネフ），

(ii) $c_1(\overline{\mathcal{L}})$ が，半正である，

を満たすときに，**垂直的にネフ**（*vertically nef*）であると言う．

また，C^∞-エルミート直線束 $\overline{\mathcal{L}}$ は f-豊富で $c_1(\overline{\mathcal{L}})$ が正のとき，**垂直的に豊富**（*vertically ample*）であると言う．

さて，次の定理とその系を証明するのがこの節の目標である．

定理 3.3.1 (算術的 Hilbert-Samuel の定理)**.** $f:\mathcal{X}\to\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ を射影的な算術的多様体とし，$\overline{\mathcal{L}}$ と $\overline{\mathcal{N}}$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束とする．もし $\overline{\mathcal{L}}$ が

(i) $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ は $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ 上の豊富な直線束，

(ii) $\overline{\mathcal{L}}$ は垂直的にネフ，

を満たせば

$$\chi_{\sup}(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}\otimes\overline{\mathcal{N}})=\frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})}{(d+1)!}n^{d+1}+o(n^{d+1})$$

という漸近的な評価が成り立つ．

系 3.3.2 (小さな切断の存在)**.** $\mathcal{X}$ を射影的な算術的多様体とし，$\overline{\mathcal{L}}=(\mathcal{L},\|\cdot\|)$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束とする．もし $\overline{\mathcal{L}}$ が

(i) $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ は $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ 上の豊富な直線束

(ii) $\overline{\mathcal{L}}$ は垂直的にネフ

(iii) $\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})>0$

を満たせば，$\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}$ は十分大きな n について，零でない小さな切断を持つ．

定理 3.3.1の証明のため，弱い形の次の定理 3.3.3をまず証明する．

定理 3.3.3 (弱い形の算術的 Hilbert-Samuel の定理)**.** $f:\mathcal{X}\to\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ を射影的な算術的多様体とし，$\overline{\mathcal{L}}$ と $\overline{\mathcal{N}}$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束とする．$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ が正則であると仮定する．もし $\overline{\mathcal{L}}$ が垂直的に豊富であれば，

$$\chi_{\sup}(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}\otimes\overline{\mathcal{N}})=\frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})}{(d+1)!}n^{d+1}+O(n^{d}\log n)$$

という漸近的な評価が成り立つ．

注意 3.3.4. これから説明する定理 3.3.1 は算術的リーマン・ロッホの定理から定理 3.3.3 を証明して，それを用いて証明するものである．ところで 1995 年の論文 [1] で Abbes と Bouche は，算術的リーマン・ロッホの定理 を経由しない，定理 3.3.3の（$\mathcal{N}=\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ 場合の）短かい証明を与えた．従って，今では，定理 3.3.1 （$\mathcal{N}=\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ 場合）とその系 3.3.2 の短かい証明

がある．しかしながら，せっかく §2 で 算術的リーマン・ロッホの定理を述べたので，牛刀を持ってという感もあるが，この講義ノートでは算術的リーマン・ロッホの定理を用いた定理 3.3.1の証明を説明する．

証明のあらましを述べよう．
弱い形の算術的 Hilbert-Samuel の定理（定理 3.3.3）の証明は次の 4 段階に分れる．

ステップ１： $\chi_{\sup}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}^{\otimes n} \otimes \overline{\mathcal{N}})$ と $\chi_{L^2}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}^{\otimes n} \otimes \overline{\mathcal{N}})$ を比較する（§§3.4）．
ステップ２： $\chi_{L^2}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}^{\otimes n} \otimes \overline{\mathcal{N}})$ と $\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\det \mathbf{R} f_*(\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{N}), h_Q))$ を結び付ける（§§3.5）．
ステップ３： 上のステップで，L^2-計量 と Quillen 計量の差として，解析的ねじれが出てくるので，その漸近的評価をする（§§3.5）．
ステップ４： 算術的リーマン・ロッホの定理を使って，$\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\det \mathbf{R} f_*(\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{N}), h_Q))$ と $\dfrac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1})}{(d+1)!} n^{d+1}$ を結び付ける（§§3.5）．

算術的 Hilbert-Samuel の定理（定理 3.3.1）は，$\mathcal{X}$ の生成的特異点解消を考えることによって，定理 3.3.3 を用いて証明される（§§3.6 参照）．
系 3.3.2 は，定理 3.3.1 からミンコフスキの凸体定理を用いて示される．以下で（定理 3.3.1 を認めて）その証明をしよう．

系 3.3.2の証明： $\Gamma_n = H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$，$V_n = H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とし，V_n には $\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}$ から定まる sup-ノルムを入れておく．ミンコフスキの凸体定理（3.2.2）より

$$\lambda_1(\Gamma_n)^{\dim V_n} \leq 2^{\dim V_n} \cdot \mathrm{vol}_{\sup}(\Gamma_n),$$

あるいは，両辺の log をとって

$$(\dim V_n) \log \lambda_1(\Gamma_n) \leq (\dim V_n) \log 2 + \log \mathrm{vol}_{\sup}(\Gamma_n) \tag{3.3.4.1}$$

が成り立つ．一方，定理 3.3.1 から

$$\chi_{\sup}(\Gamma_n) = \frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})}{(d+1)!} n^{d+1} + o(n^{d+1})$$

であり，また $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ が豊富なことから，十分大きな n に対して

$$\dim V_n = \frac{\deg(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^d)}{d!} n^d + O(n^{d-1})$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
(\dim V_n) \log 2 + \log \mathrm{vol}_{\sup}(\Gamma_n) &= (\dim V_n) \log 2 - \chi_{\sup}(\Gamma_n) \\
&= \left\{ \frac{\deg(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^d)}{d!} n^d + O(n^{d-1}) \right\} \log 2 \\
&\qquad - \left\{ \frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})}{(d+1)!} n^{d+1} + o(n^{d+1}) \right\} \\
&= -\frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})}{(d+1)!} n^{d+1} + o(n^{d+1})
\end{aligned}$$

従って，$\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}) > 0$ であれば，

$$(\dim V_n)\log 2 + \log \mathrm{vol}_{\sup}(\Gamma_n) \longrightarrow -\infty \quad (n \to \infty) \tag{3.3.4.2}$$

となる．(3.3.4.1) と (3.3.4.2) から十分大きな n に対して

$$\log \lambda_1(\Gamma_n) < 0 \tag{3.3.4.3}$$

が分かる． 定義から

$$\lambda_1(\Gamma_n) = \min\{\|s\|_{\sup} \mid s \in \Gamma_n,\ s \neq 0\}$$

であったから, (3.3.4.3) は，Γ_n のある零でない元 s があって $\|s\|_{\sup} < 1$ を示している．従って $\mathcal{L}^{\otimes n}$ は十分大きな n について，零でない小さな切断を持つ． □

3.4. L^p-ノルムと sup-ノルムの比較. $U \subset \mathbb{C}$ を開単位円板，$\phi(z)$ を U 上正則で $\overline{U}$ 上連続な関数とすれば，

$$\begin{aligned}\iint_{|z|<1} |\phi(z)|^2 dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} |\phi(re^{i\theta})|^2 d\theta\right) rdr \\ &\geq \int_0^1 \left(2\pi|\phi(0)|^2\right) rdr \\ &= \pi|\phi(0)|^2.\end{aligned}$$

この不等式は，正則関数について，その原点の値を L^2-ノルムで評価していると思うことができる．

次の補題は，コンパクト複素多様体上の，エルミート直線束の（巾などの）大域切断について，同様な評価（L^p-sup 比較）を示しているものである．

上の場合では，$|\phi(z)|^2$ が劣調和であることを用いたが，次の補題の場合にも，うまく劣調和関数がでてくるようにして証明される． もともとの証明は L^2-sup 比較で Gromov によるもの（[7] 参照）だが，ここでは [20] を参考にした．

補題 3.4.1 (L^p-sup 比較)**.** X を d 次元のコンパクトな複素多様体，$\overline{L} = (L, h_L)$，$\overline{N} = (N, h_N)$ を X 上の C^∞-エルミート直線束，dx を X 上の体積要素とする．

このとき，任意の p, $1 \leq p < \infty$ に対して，ある正の定数 C_1, C_2 が存在して，任意の正の整数 n と任意の切断 $s \in H^0(X, L^{\otimes n} \otimes N)$ に対して，

$$C_1\|s\|_{L^p} \leq \|s\|_{\sup} \leq C_2 n^{\frac{2d}{p}}\|s\|_{L^p}$$

が成り立つ． ただし

$$\|s\|_{\sup} = \sup_{x \in X} \sqrt{h_L^n \cdot h_N(s,s)}$$

$$\|s\|_{L^p} = \left(\int_X \left(h_L^n \cdot h_N(s,s)\right)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

である．

証明： まず

$$\|s\|_{L^p}^p = \int_X \left(h_L^n \cdot h_N(s,s)\right)^{\frac{p}{2}} dx \le \left(\int_X dx\right) \|s\|_{\sup}^p$$

なので，$C_1 = (\int_X dx)^{-1/p}$ とおけば，左側の不等式が出る．

右側の不等式を示すため，各 $x \in X$ に対して，座標近傍 $(U_x; \phi_x^1, \ldots, \phi_x^d)$ で，L と N が U_x 上局所自明になっているようなものをとる．e_x, f_x をそれぞれ L, N の U_x 上の局所基底とし，$l_x = h_L(e_x, e_x), n_x = h_N(f_x, f_x)$ とおく．l_x, n_x はともに，U_x 上の正値 C^∞ 関数である．以下では

$$(\phi_x^1, \ldots, \phi_x^d) : U_x \longrightarrow \mathbb{C}^d$$

によって，U_x をその像と同一視して，U_x を $\mathbb{C}^d$ の開集合とみなすことにする．

$a = (a_1, \ldots, a_d), b = (b_1, \ldots, b_d) \in U_x$ に対し，

$$r_x(a,b) = |a_1 - b_1| + \cdots + |a_d - b_d|$$

とおく． また $a = (a_1, \ldots, a_d) \in U_x$, $R > 0$ に対し

$$B_x(a,R) = \{z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_d) \in \mathbb{C}^d \mid |z_i - a_i| < R \quad (1 \le i \le d)\}$$

とおく．

主張 3.4.1.1. X の有限開被覆 $W_1, \ldots, W_k$ と正の数 R と K で
- (i) 各 i, $1 \le i \le k$ に対し，ある $x_i \in X$ があって $W_i \subset U_{x_i}$,
- (ii) 任意の $a \in W_i$ に対して，$B_{x_i}(a,R) \subset U_{x_i}$,
- (iii) 任意の $a \in W_i$ と $\zeta \in B_{x_i}(a,R)$ に対して，$l_{x_i}(\zeta) \ge l_{x_i}(a) - K r_{x_i}(a,\zeta) \ge 0$,

を満たすようなものが存在する．

証明： 各 $x \in X$ に対して，正の数 R_x を

$$\overline{B_x(a, 2R_x)} \subset U_x$$

となるようにとる．l_x は $U_x \subset \mathbb{C}^d$ 上の C^∞-関数であったから，$\mathbb{C}^d$ の座標を $(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$, $\zeta_j = \xi_j + \sqrt{-1}\eta_j$ とおいて，

$$K_x = \max_{1 \le j \le d} \left\{ \sup_{\zeta \in \overline{B_x(a,2R_x)}} \left| \frac{\partial l_x}{\partial \xi_j}(\zeta) \right|, \sup_{\zeta \in \overline{B_x(a,2R_x)}} \left| \frac{\partial l_x}{\partial \eta_j}(\zeta) \right| \right\}$$

とおく． すると任意の $a, \zeta \in B_x(a, 2R_x)$ に対して

$$|l_x(\zeta) - l_x(a)| \le \sqrt{2} K_x r_x(\zeta, a)$$

が成り立つ．

W_i $(1 \le i \le k)$ と R と K を定めよう．まず $\bigcup_{x \in X} B_x(x, R_x) = X$ であるから，有限個の $x_1, \ldots, x_k$ が存在して，$\bigcup_{i=1}^k B(x_i, R_{x_i}) = X$ となる．$W_i = B_{x_i}(x_i, R_{x_i})$ とおく．もちろん $W_i \subset U_{x_i}$ である．次に $K = \max_{1 \le i \le k} \sqrt{2} K_{x_i}$ とおく．すると任意の $a, \zeta \in B_x(a, 2R_x)$ に対して

$$|l_{x_i}(\zeta) - l_{x_i}(a)| \le K r_{x_i}(\zeta, a)$$

である．そこで，

$$R'_i = \inf_{a \in W_i} \frac{l_{x_i}(a)}{K} > 0$$

とおいて，$R = \min_{1 \le i \le k}\{R'_i, R_{x_i}\}$ とおく．$R \le R_{x_i}$ より，任意の $a \in W_i$ に対して，$B_{x_i}(a,R) \subset U_{x_i}$ である．さらに $R \le R'_i$ より，任意の $a \in W_i$ と $\zeta \in B_{x_i}(a,R)$ に対して

$$l_{x_i}(\zeta) \ge l_{x_i}(a) - K r_{x_i}(a,\zeta) \ge l_{x_i}(a) - K R'_i \ge 0$$

□

以下では簡単のため，$e_{x_i} = e_i$，$f_{x_i} = f_i$，$l_{x_i} = l_i$，$n_{x_i} = n_i$，$U_{x_i} = U_i$ とおく．s を $H^0(X, L^{\otimes n} \otimes N)$ の任意の元としよう．$\|s\|$ は点 $a \in X$ で最大値をとるとする，つまり $\|s\|_{\sup} = \|s\|(a)$．$a \in W_i$ とする．U_i 上の局所基底 e_i，f_i を用いて，

$$s = g e_i^n f_i$$

と書く．ここで，g は U_i 上の正則関数である．

$$(h_L^n \cdot h_N(s,s)(\zeta))^{\frac{p}{2}} = |g(\zeta)|^p l_i(\zeta)^{\frac{np}{2}} n_i(\zeta)^{\frac{p}{2}}$$

である．正の定数 C_3，C_4，C_5 を

$$dx \ge C_3 d\xi_1 d\eta_1 \cdots d\xi_d d\eta_d$$
$$\max_{1 \le i \le k} \inf_{\zeta \in B_{x_i}(x_i, 2R_{x_i})} n_i(\zeta)^{\frac{p}{2}} = C_4$$
$$\max_{1 \le i \le k} \sup_{\zeta \in B_{x_i}(x_i, 2R_{x_i})} n_i(\zeta)^{\frac{p}{2}} = C_5$$

となるようにとる．ただし，$\mathbb{C}^d$ の座標を $(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ として，$\zeta_j = \xi_j + \sqrt{-1}\eta_j$ とおいている．

$|g|^p$ は劣調和関数なので

$$\begin{aligned}
\|s\|_{L^p}^p &= \int_X h_L^n \cdot h_N(s,s)^{\frac{p}{2}} dx \\
&\ge C_3 C_4 \int_{B(a,R)} |g(\zeta)|^p l_i(\zeta)^{\frac{np}{2}} d\xi_1 d\eta_1 \cdots d\xi_d d\eta_d \\
&\ge C_3 C_4 \int_{B(a,R)} |g(\zeta)|^p \left(l_i(a) - K r_i(a,\zeta)\right)^{\frac{np}{2}} d\xi_1 d\eta_1 \cdots d\xi_d d\eta_d \\
&\ge (2\pi)^d C_3 C_4 |g(a)|^p \\
&\quad \times \int_0^R \cdots \int_0^R R_1 \cdots R_d \left(l_i(a) - K r_i(a,\zeta)\right)^{\frac{np}{2}} dR_1 \cdots dR_d
\end{aligned}$$

となる．

主張 3.4.1.2. $R \ge 0$，$A \ge 0$，$B \ge 0$，$A - BR \ge 0$，$\beta \ge 0$ のとき，

$$\int_0^R x(A - Bx)^\beta dx \ge \frac{R^2}{(\beta+1)(\beta+2)} A^\beta$$

が成り立つ．

証明： $x = Ry$ とおけば，

$$\int_0^R x(A-Bx)^\beta dx \geq R^2 A^\beta \int_0^1 y(1-y)^\beta dy$$
$$= R^2 A^\beta B(2,\beta+1) = \frac{R^2}{(\beta+1)(\beta+2)} A^\beta$$

□

主張 3.4.1.2 より

$$\begin{aligned}\|s\|_{L^p}^p &\geq \frac{(2\pi)^d C_3 C_4 R^{2d}}{(\frac{pn}{2}+1)^d(\frac{pn}{2}+2)^d} |g(a)|^p l_i(a)^{\frac{pn}{2}} \\ &\geq \frac{(2\pi)^d C_3 C_4 R^{2d}}{C_5(\frac{pn}{2}+1)^d(\frac{pn}{2}+2)^d} |g(a)|^p l_i(a)^{\frac{pn}{2}} n_i(a)^{\frac{p}{2}} \\ &= \frac{(2\pi)^d C_3 C_4 R^{2d}}{C_5(\frac{pn}{2}+1)^d(\frac{pn}{2}+2)^d} \|s\|_{\sup}^p\end{aligned}$$

となる．そこで，正の定数 C_2 を，任意の n に対して

$$\frac{(2\pi)^d C_3 C_4 R^{2d}}{C_5(\frac{pn}{2}+1)^d(\frac{pn}{2}+2)^d} \geq \frac{1}{C_2^p n^{2d}}$$

となるようにとれば

$$\|s\|_{\sup} \leq C_2 n^{\frac{2d}{p}} \|s\|_{L^p}$$

が成り立つ． □

上の補題から，$e_n = \dim H^0(X, L^{\otimes n} \otimes N)$ とすると，$e_n = O(n^d)$ であり，$l \in \det H^0(X, L^{\otimes n} \otimes N)$ について

$$C_1^{e_n} \|l\|_{L^2} \leq \|l\|_{\sup} \leq (C_2 n^d)^{e_n} \|l\|_{L^2}$$

が成り立つ．特に log をとって，

$$\log \|l\|_{L^2} = \log \|l\|_{\sup} + O(n^d \log n) \tag{3.4.1.3}$$

が成り立つ．

3.5. **弱い形の算術的 Hilbert-Samuel の定理の証明.** この小節で，弱い形の算術的 Hilbert-Samuel の定理（定理 3.3.3）を証明するが，その前にいくつか準備しておこう．

まず，$\chi_{L^2}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}^{\otimes n} \otimes \overline{\mathcal{N}})$ と $\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\det \mathbf{R} f_*(\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{N}), h_Q))$ を結び付けることを考える．§§1.1 で，$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上のエルミート直線束に対して $\widehat{\deg}$ を定めたが，より一般に，$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上の階数が r の 計量の入った連接層に対しても $\widehat{\deg}$ を定義しよう．そこで，H を階数が r の有限 $\mathbb{Z}$-加群 とし，H_{tor} で H のねじれ元全体を表す．そして h を $(H/H_{tor}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ のエルミート計量とし，対 $\overline{H} = (H, h)$ を考える．このとき $e_1, \ldots, e_r$ を H の $\mathbb{Z}$-基底として，次の量

$$\log \# H_{tor} - \frac{1}{2} \log \det(h(e_i, e_j))_{i,j}$$

を考えると, これは $e_1, \ldots, e_r$ の取り方によらない．そこで，この値を $\widehat{\deg}(\overline{H})$ で表す．$\overline{H} = (H, h)$ がエルミート直線束であるときには，今までの定義と一致している．

ところで，$\overline{H}=(H,h)$ から $(\det H, \det h)$ を作ることができる．このとき，

$$\widehat{\deg}(\det H, \det h) = \widehat{\deg}(H,h) \tag{3.5.1}$$

が成り立つことが確められる．

次の補題を考える．

補題 3.5.2. $f:\mathcal{X}\to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ を 射影的な算術的多様体で，$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ が正則なものとする．$\overline{\mathcal{E}}$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミートベクトル束とする．このとき

$$\begin{aligned}&\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\det \mathbf{R}f_*(\mathcal{E}), h_Q))\\ &\qquad = \sum_{q\geq 0}(-1)^q\left\{\log \# H^q(\mathcal{X},\mathcal{E})_{tor} + \chi_{h_{L^2}}(H^q(\mathcal{X},\mathcal{E})) + \log \operatorname{vol}(B_{\operatorname{rk} H^q(\mathcal{X},\mathcal{E})})\right\} + T(\overline{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}})\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$\operatorname{vol}(B_{\operatorname{rk} H^q(\mathcal{X},\mathcal{E})})$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^{\operatorname{rk} H^q(\mathcal{X},\mathcal{E})}$ の単位球の体積である．

証明： $\det \mathbf{R}f_*(\mathcal{E}) = \bigotimes_{q\geq 0}\det H^q(\mathcal{X},\mathcal{E})^{(-1)^q}$ であった．(3.5.1) より，$\{e_i^q\}_i$ を $H^q(\mathcal{X},\mathcal{E})$ の $\mathbb{Z}$-基底として，

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\det \mathbf{R}f_*(\mathcal{E}), h_Q)^{(-1)^q}) - T(\overline{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}) &= \widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1\left(\bigotimes_{q\geq 0}\det H^q(\mathcal{X},\mathcal{E}), h_{L^2}\right)^{(-1)^q}\right)\\ &= \sum_{q\geq 0}(-1)^q\widehat{\deg}\left(H^q(\mathcal{X},\mathcal{E}), h_{L^2}\right)\\ &= \sum_{q\geq 0}(-1)^q\left\{\log \# H_{tor} - \frac{1}{2}\log\det(h_{L^2}(e_i^q, e_j^q))_{i,j}\right\}\end{aligned}$$

となる．一方

$$\chi_{h_{L^2}}(H^q(\mathcal{X},\mathcal{E})) = -\frac{1}{2}\log\det(h_{L^2}(e_i^q,e_j^q))_{i,j} + \log\operatorname{vol}(B_{\operatorname{rk} H^q(\mathcal{X},\mathcal{E})})$$

である．両者を合わせて，補題が示された．□

次に解析的ねじれの漸近的評価について考える．Bismut と Vasserot は次のことを示した．

命題 3.5.3. X を 次元が d のコンパクトケーラー多様体とする．$\overline{L}$，$\overline{N}$ を X 上の C^∞-エルミート直線束とする．もし $c_1(\overline{L})$ が各点で正であれば，

$$T(L^{\otimes n}\otimes N) = O(n^d\log n)$$

が成り立つ．

証明は [4] を見てほしい．

次に $\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\det \mathbf{R}f_*(\mathcal{L}^{\otimes n}\otimes \mathcal{N}), h_Q))$ と $\dfrac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1})}{(d+1)!}n^{d+1}$ を，算術的リーマン・ロッホの定理を使って結び付けよう．$f:\mathcal{X}\to\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ を次元が $d+1$ の射影的な算術的多様体で，$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ が正則なものとする．$\overline{\mathcal{L}}$ と $\overline{\mathcal{N}}$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束とする．このとき，算術

的リーマン・ロッホの定理を使って，$\widehat{c}_1(\det \mathbf{R}f_*(\mathcal{L}^{\otimes n}\otimes\mathcal{N}), h_Q)$ の $n\to\infty$ の様子を調べよう．まず，算術的リーマン・ロッホの定理 2.5.1 から

$$\widehat{c}_1(\det \mathbf{R}f_*(\mathcal{L}^{\otimes n}\otimes\mathcal{N}), h_Q) = f_*\left(\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}\otimes\overline{\mathcal{N}})\cdot\widehat{\mathrm{td}}^R(\overline{T_{X/Y}})\right)^{(1)}$$

である． そして

$$\begin{aligned}&\left(\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}\otimes\overline{\mathcal{N}})\cdot\widehat{\mathrm{td}}^R(\overline{T_{X/Y}})\right)^{(d+1)}\\ &\qquad= \left(\exp(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}\otimes\overline{\mathcal{N}}))\cdot\widehat{\mathrm{td}}^R(\overline{T_{X/Y}})\right)^{(d+1)} = \frac{\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}}{(d+1)!}n^{d+1}+O(n^d)\end{aligned}$$

であるから，まとめて

$$\widehat{c}_1(\det \mathbf{R}f_*(\mathcal{L}^{\otimes n}\otimes\mathcal{N}), h_Q) = \frac{\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}}{(d+1)!}n^{d+1}+O(n^d) \tag{3.5.4}$$

を得る．

最後に，弱い形の算術的 Hilbert-Samuel の定理（定理 3.3.3）を証明しよう．今まで見てきたことから，$n\to\infty$ のときに

$$\begin{aligned}\chi_{\sup}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}\otimes\overline{\mathcal{N}}) &= \chi_{L^2}(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}\otimes\overline{\mathcal{N}}) + O(n^d\log n)\\ &= \widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\det \mathbf{R}f_*(\mathcal{L}^{\otimes n}\otimes\mathcal{N}), h_Q)) - T(\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}\otimes\mathcal{N}_{\mathbb{C}}) + O(n^d\log n)\\ &= \widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\det \mathbf{R}f_*(\mathcal{L}^{\otimes n}\otimes\mathcal{N}), h_Q)) + O(n^d\log n)\\ &= \frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})}{(d+1)!}n^{d+1} + O(n^d\log n)\end{aligned}$$

となる． 実際，最初の等式は (3.4.1.3) から従う．2 番目の等式については，$\mathcal{L}$ が f-豊富なので，$n\to\infty$ のときに $H^q(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}\otimes\mathcal{N}) = 0$ となることと，

$$\log\mathrm{vol}(B_{\mathrm{rk}\,H^0(\mathcal{X},\mathcal{L}^{\otimes n}\otimes\mathcal{N})}) = O(n^d)$$

に注意して，補題 3.5.2 を用いればよい．また 3 番目の等式は解析的ねじれの漸近的評価（命題 3.5.3）であり，最後の等式は (3.5.4) である． 従って 定理 3.3.3 が証明された．

3.6. 算術的 Hilbert-Samuel の定理の証明.

この小節では，[30] に従って，算術的 Hilbert-Samuel の定理（定理 3.3.1）を証明する．

その前に，いくつかの補題を準備しておく．

補題 3.6.1. $(V, \|\cdot\|)$ を b 次元の実ノルム空間とし，Γ を V の格子とする．$\lambda_1(\Gamma)\le\cdots\le\lambda_b(\Gamma)$ を Γ の逐次最小とする（§§3.2 参照）．

Γ' を Γ の階数が b' の部分格子（つまり部分 $\mathbb{Z}$-加群）とし，V' を $\mathbb{R}$ 上 Γ' で生成される実ベクトル空間とする．$(V, \|\cdot\|)$ から誘導されるノルムによって，V' は b' 次元の実ノルム空間になる．このとき，

$$\chi_{\|\cdot\|}(\Gamma) - \chi_{\|\cdot\|}(\Gamma') \ge -\log(b!) - (b-b')\log\left(\frac{1}{2}\lambda_b(\Gamma)\right)$$

が成り立つ．

証明：　$\lambda_1(\Gamma') \le \cdots \le \lambda_{b'}(\Gamma')$ を Γ' の逐次最小とすれば，定義から $\lambda_i(\Gamma) \le \lambda_i(\Gamma')$ $(1 \le i \le b')$ である．

一方，ミンコフスキの凸体定理（定理 3.2.2）は，

$$\frac{2^b}{b!}\operatorname{vol}_{\|\cdot\|}(\Gamma) \le \lambda_1(\Gamma)\cdots\lambda_b(\Gamma) \le 2^b \operatorname{vol}_{\|\cdot\|}(\Gamma)$$

であったから，

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}_{\|\cdot\|}(\Gamma) &\le \frac{b!}{2^b}\lambda_1(\Gamma)\cdots\lambda_b(\Gamma)\\ &\le \frac{b!}{2^b}\lambda_1(\Gamma')\cdots\lambda_{b'}(\Gamma')\cdot\lambda_b(\Gamma)^{b-b'}\\ &\le b!\operatorname{vol}_{\|\cdot\|}(\Gamma')\left(\frac{\lambda_b(\Gamma)}{2}\right)^{b-b'}\end{aligned}$$

が成り立つ．両辺で $-\log$ をとれば，求めていた不等式を得る．□

次の補題に入る前に，m-regular について思い出しておこう．X を体 k 上の射影的な代数多様体，L を X 上の非常に豊富な直線束とする．X 上の連接層 F が m-regular であるとは，$H^q(X, F \otimes L^{\otimes(m-q)}) = 0$ $(\forall q > 0)$ が成り立つときに言う．F が m-regular であれば，$n \ge m$ に対して 1）F は n-regular，2）$H^0(X, F \otimes L^{\otimes n}) \otimes H^0(X, L) \twoheadrightarrow H^0(X, F \otimes L^{\otimes(n+1)})$ となる（[16, II §1 Proposition 1]）．

補題 3.6.2. k を体，$\pi : Y \to X$ を k 上の射影的代数多様体の間の射とする．L を X 上の豊富な直線束，M を Y 上の豊富な直線束とする．このとき

$$\bigoplus_{a,b\ge 0} H^0(Y, \pi^*(L)^{\otimes a} \otimes M^{\otimes b})$$

は k 上の有限生成代数になる．

証明：　**ステップ１：**　L，M が非常に豊富と仮定して，補題を示す．$d = \dim Y$ とおく．十分大きな b_0 をとれば，任意の j, $0 \le j \le d$ と任意の q, $1 \le q \le d$ に対して

$$H^q\left(Y, \pi^*(L)^{\otimes j} \otimes M^{\otimes(b_0-q)}\right) = 0 \tag{3.6.2.1}$$

が成り立つ． j を固定すれば，これは $\pi^*(L)^{\otimes j}$ が b_0-regular であることを意味しているから，任意の $b \ge b_0$ に対して

$$H^q\left(Y, \pi^*(L)^{\otimes j} \otimes M^{\otimes(b-q)}\right) = 0 \quad (q > 0)$$

となる． これから，任意の $b \ge b_0$ に対して

$$H^q\left(X, L^{\otimes(d-q)} \otimes \pi_*(M^{\otimes b})\right) = H^q\left(Y, \pi^*(L)^{\otimes(d-q)} \otimes M^{\otimes b}\right) = 0 \quad (q > 0)$$

となる． このことは $\pi_*(M)^{\otimes b}$ が d-regular であることを意味しているから，[16, II §1 Proposition 1] より $a \ge d$ に対して

$$H^q\left(X, L^{\otimes a} \otimes \pi_*(M^{\otimes b})\right) \otimes H^0\left(X, L\right) \twoheadrightarrow H^q\left(X, L^{\otimes(a+1)} \otimes \pi_*(M)^{\otimes b}\right),$$

すなわち

$$H^q\left(Y, \pi^*(L)^{\otimes a} \otimes M^{\otimes b}\right) \otimes H^0\left(Y, \pi^*(L)\right) \twoheadrightarrow H^q\left(X, \pi^*(L)^{\otimes(a+1)} \otimes M^{\otimes b}\right)$$

が成り立つ． 特に，任意の $a \geq d$ に対して

$$H^0\left(Y, \pi^*(L)^{\otimes d} \otimes M^{\otimes b}\right) \otimes H^0\left(Y, \pi^*(L)\right)^{\otimes(a-d)} \twoheadrightarrow H^q\left(X, \pi^*(L)^{\otimes a} \otimes M^{\otimes b}\right) \tag{3.6.2.2}$$

である．

一方，(3.6.2.1) で $j = d$ とすると，

$$H^q\left(Y, \pi^*(L)^{\otimes d} \otimes M^{\otimes(b_0 - q)}\right) = 0 \quad (q > 0)$$

である． これは，$\pi^*(L)^{\otimes d}$ が b_0-regular であることを意味しているから，任意の $b \geq b_0$ に対して

$$H^0\left(Y, \pi^*(L)^{\otimes d} \otimes M^{\otimes b_0}\right) \otimes H^0\left(Y, M\right)^{\otimes(b-b_0)} \twoheadrightarrow H^q\left(X, \pi^*(L)^{\otimes d} \otimes M^{\otimes b}\right) \tag{3.6.2.3}$$

となる．

(3.6.2.2)，(3.6.2.3) をまとめると，任意の $a \geq d$ と $b \geq b_0$ に対して

$$H^q\left(X, \pi^*(L)^{\otimes d} \otimes M^{\otimes b_0}\right) \otimes H^0\left(Y, \pi^*(L)\right)^{\otimes(a-d)} \otimes H^0\left(Y, M\right)^{\otimes(b-b_0)} \twoheadrightarrow H^q\left(X, \pi^*(L)^{\otimes a} \otimes M^{\otimes b}\right)$$

となる． このことから補題が従う．

ステップ 2： 十分大きな A と B をとって，$L^{\otimes A}$ と $M^{\otimes B}$ が共に非常に豊富なものとする．

$$\begin{aligned}
&\bigoplus_{a,b\geq 0} H^0(Y, \pi^*(L)^{\otimes a} \otimes M^{\otimes b}) \\
&\qquad = \bigoplus_{0\leq i<A, 0\leq j<B} \bigoplus_{a,b\geq 0} H^0\left(Y, \pi^*(L^{\otimes A})^{\otimes a} \otimes (M^{\otimes B})^{\otimes b} \otimes \pi^*(L^{\otimes i}) \otimes M^{\otimes j}\right)
\end{aligned}$$

と分解して，$\bigoplus_{a,b\geq 0} H^0\left(Y, \pi^*(L^{\otimes A})^{\otimes a} \otimes (M^{\otimes B})^{\otimes b} \otimes \pi^*(L^{\otimes i}) \otimes M^{\otimes j}\right)$ に，ステップ 1 と同じようなことを行えばよい． □

次の補題に入る前に，$\mathcal{X}$ を算術的多様体，$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束とするときに，$H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ は sup-ノルムによってノルム空間となり，$H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ は $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の格子になっていたことを思い出しておこう．特に逐次最小

$$\lambda_i(H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}))\ 1 \leq i \leq \operatorname{rk} H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$$

が定まるが，$\lambda_{\operatorname{rk} H^0(\mathcal{X},\mathcal{L})}(H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}))$ を $\lambda_{\max}(H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}))$ と書くことにする．

補題 3.6.3. $\pi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ を k 上の射影的な算術的多様体の間の射とする．$\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{N}}$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束，$\overline{\mathcal{M}}$ を $\mathcal{Y}$ 上の C^∞-エルミート直線束とする．$\overline{\mathcal{L}}_{\mathbb{Q}}$，$\overline{\mathcal{M}}_{\mathbb{Q}}$ はそれぞれ $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$，$\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}$ 上で豊富であると仮定する．このとき，ある定数 C が存在して，任意の整数 $a \geq 0$ $b \geq 0$ に対して

$$\lambda_{\max}(H^0(\mathcal{X}, \pi^*(\mathcal{L})^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}^{\otimes b} \otimes \overline{\mathcal{N}})) \leq C^{a+b}$$

が成り立つ．

証明： $\overline{\mathcal{N}} = (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, |\cdot|)$ として証明する (一般の場合も同様に示せる）．補題 3.6.2 から

$$\bigoplus_{a,b\geq 0} H^0(\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}, \pi^*(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\otimes b})$$

は $\mathbb{Q}$ 上有限生成代数である． しかもその補題の証明から，ある正の整数 a_0, b_0 と有限個の元 $s_1, \ldots, s_k \in \bigoplus_{a,b\geq 0} H^0(\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}, \pi^*(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\otimes b})$ で，s_i の次数 (a_i, b_i) が $(a_i, b_i) \neq 0$ である

ものが存在して，a, b が $a \geq a_0$ または $b \geq b_0$ を満たせば，$H^0(\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}, \pi^*(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\otimes b})$ は $\mathbb{Q}$ 上 $s_1, \ldots, s_k$ で生成されることがわかる．

必要なら s_i の分母を払って，s_i は $H^0(\mathcal{Y}, \pi^*(\mathcal{L}^{\otimes a}) \otimes \mathcal{M}^{\otimes b})$ の元であるとしてよい．そして $C = \max_{1 \leq i \leq k} \|s_i\|_{\mathrm{sup}}$ とおく．

そこで $a \geq a_0$ または $b \geq b_0$ を満たす整数 a, b に対して，

$$\left\{ l_\alpha = \prod_i s_i^{\alpha_i} \;\middle|\; \alpha_i \geq 0,\ \sum_i \alpha_i a_i = a,\ \sum_i \alpha_i b_i = b \right\}$$

という集合を考えれば，この集合は $\mathbb{Q}$ 上 $H^0(\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}, \pi^*(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\otimes b})$ を張る．従って

$$\lambda_{\max}(H^0(\mathcal{X}, \pi^*(\mathcal{L})^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}^{\otimes b} \otimes \overline{\mathcal{N}})) \leq \|l_\alpha\|_{\mathrm{sup}} \leq C^{\sum_i \alpha_i} \leq C^{\sum_i \alpha_i (a_i + b_i)} \leq C^{a+b}$$

が成り立つ．$a < a_0$ かつ $b < b_0$ のときにも，$\lambda_{\max}(H^0(\mathcal{X}, \pi^*(\mathcal{L})^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}^{\otimes b} \otimes \overline{\mathcal{N}})) \leq C^{a+b}$ が成り立つように C を取り換えることによって，補題は示された． □

補題 3.6.4. k を体，$\pi : Y \to X$ を k 上の射影的代数多様体の間の射とする．L を X 上の豊富な直線束，M を Y 上の豊富な直線束とする．H を Y 上の直線束とする．このとき，十分大きな任意の n と，十分大きな任意の N と，任意の i, $0 \leq i \leq N-1$ に対して

$$H^q(Y, \pi^*(L)^{\otimes(Nn+i)} \otimes M^{\otimes n} \otimes H) = 0 \quad (q > 0)$$

となる．

証明： 十分大きな任意の n と，十分大きな任意の N に対して

$$H^q(Y, \pi^*(L)^{\otimes N} \otimes M^{\otimes n} \otimes H) = 0 \quad (q > 0)$$

を示せば十分である．また L，M が非常に豊富であるとしてよい．$d = \dim Y$ とおく．十分大きな n_0 をとれば，任意の j, $0 \leq j \leq d$ と任意の q, $1 \leq q \leq d$ に対して

$$H^q\left(Y, \pi^*(L)^{\otimes j} \otimes M^{\otimes(n_0 - q)} \otimes H\right) = 0$$

が成り立つ．j を固定すれば，これは $\pi^*(L)^{\otimes j}$ が n_0-regular であることを意味しているから，任意の $n \geq n_0$ に対して

$$H^q\left(Y, \pi^*(L)^{\otimes j} \otimes M^{\otimes(n-q)} \otimes H\right) = 0 \quad (q > 0)$$

となる．これから，任意の $n \geq n_0$ に対して

$$H^q\left(X, L^{\otimes(d-q)} \otimes \pi_*(M^{\otimes n} \otimes H)\right) = H^q\left(Y, \pi^*(L)^{\otimes(d-q)} \otimes M^{\otimes n} \otimes H\right) = 0 \quad (q > 0)$$

となる．このことは $\pi_*(M^{\otimes n} \otimes H) = 0$ が d-regular であることを意味しているから，任意の $N \geq d$ に対して

$$H^q\left(X, L^{\otimes(N-q)} \otimes \pi_*(M^{\otimes n} \otimes H)\right) = 0 \quad (q > 0)$$

となる．従って $N \geq d$ と $n \geq n_0$ に対して

$$H^q\left(Y, \pi^*(L)^{\otimes(N-q)} \otimes M^{\otimes n} \otimes H\right) = 0 \quad (q > 0)$$

である． □

定理 3.3.1の証明： 簡単のため，$\mathcal{N} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ として証明する．幾つかの設定をする．

(i) $\pi : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ を $\mathcal{X}$ の生成的特異点解消（§1.6 参照）とし，$\widetilde{\mathcal{X}}$ 上の C^∞-エルミート直線束 $\overline{\mathcal{M}}$ を $\mathcal{M}$ が非常に豊富で，第 1 チャーン形式 $c_1(\overline{\mathcal{M}})$ が各点で正なものとする．零でない $\mathcal{M}$ の切断 $s_1 \in H^0(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{M})$ をとり，C_1' で s_1 の sup-ノルムを表す．$C_1 = \max(C_1', 1)$ とおく．

(ii)

$$H^0\left(\widetilde{\mathcal{X}}_{\mathbb{Q}}, \pi^*(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{-1}\right) = H^0\left(\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^{\otimes a} \otimes \pi_*(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{-1})\right) \neq 0$$

となる十分大きな a をひとつとり，固定しておく．

$$H^0\left(\widetilde{\mathcal{X}}_{\mathbb{Q}}, \pi^*(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{-1}\right) = H^0\left(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi^*(\mathcal{L})^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}^{-1}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

であるから，零でない $H^0\left(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi^*(\mathcal{L})^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}^{-1}\right)$ の元 s_2 が存在する．C_2' を $\pi^*(\overline{\mathcal{L}}^{\otimes a}) \otimes \overline{\mathcal{M}}^{-1}$ に関する s_2 の sup-ノルムとする．$C_2 = \max(C_2', 1)$ とおく．

(iii) 任意の $x \in \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ と，$\pi^{-1}(x)$ 上で定義された任意の関数 ϕ に対して，$\|\phi\| = \sup_{y \in \pi^{-1}(y)} |\phi(y)|$ とおく．すると $\pi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{X}}}$ は $\mathcal{X}$ 上にノルムの入った連接層になる．$\mathcal{F} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}\left(\pi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{X}}}), \mathcal{O}_{\mathcal{X}}\right)$ とすれば，$\mathcal{F}$ も自然にノルムの入った連接層になる．$H^0\left(\mathcal{F}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^b\right) \neq 0$ となる十分大きな自然数 b をひとつとり，固定する．$H^0\left(\mathcal{X}, \mathcal{F}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^b\right) = H^0\left(\mathcal{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^b\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ であるから，零でない $H^0\left(\mathcal{X}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^b\right)$ の元 s_3 が存在する．C_3' を $\overline{\mathcal{F}} \otimes \overline{\mathcal{L}}^b$ に関する s_3 の sup-ノルムとする．$C_3 = \max(C_3', 1)$ とおく．

(iv) C_4' を 補題 3.6.3 を $(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{M}})$ に適用したときに出てくる定数として，$C_4 = \max(C_4', 2)$ とおく．

まず証明の概略を述べよう．以下では，直線束のテンソル積を，加法的に書くことにする（例えば，$\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ は $\mathcal{L} + \mathcal{M}$ と書く）．

任意の正の数 ϵ に対して，n が十分大きければ，

$$\left| \chi_{\sup}\left(\mathcal{X}, n\overline{\mathcal{L}}\right) - \frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})}{(d+1)!} n^{d+1} \right| \leq \epsilon n^{d+1} \tag{3.6.4.1}$$

が成り立つことを示すことによって，定理は証明される．そのために ϵ によって定まる十分大きな N を補助的にとり，$\pi^*(\mathcal{L}) + \frac{1}{N}\mathcal{M}$ を考える．おおざっぱに言って，$\chi_{\sup}\left(\widetilde{\mathcal{X}}, n(\pi^*(\overline{\mathcal{L}}) + \frac{1}{N}\overline{\mathcal{M}})\right)$ と $\chi_{\sup}\left(\mathcal{X}, n\overline{\mathcal{L}}\right)$ を $n \to \infty$ のときに比較し，$\chi_{\sup}\left(\widetilde{\mathcal{X}}, n(\pi^*(\overline{\mathcal{L}}) + \frac{1}{N}\overline{\mathcal{M}})\right)$ の漸近的な様子については，定理 3.3.3を用いることによって, (3.6.4.1) を示すのである．

実際には，$\pi^*(\mathcal{L}) + \frac{1}{N}\mathcal{M}$ は $\mathbb{Q}$-直線束でしかないので，N 倍する必要がある．つまりより正確には，i を $0 \leq i \leq N-1$ を満たす整数として，$\chi_{\sup}\left(\mathcal{X}, (nN+i)\overline{\mathcal{L}}\right)$ と $\chi_{\sup}\left(\widetilde{\mathcal{X}}, n(N\pi^*(\overline{\mathcal{L}}) + \overline{\mathcal{M}}) + \pi^*(i\overline{\mathcal{L}})\right)$ などを $n \to \infty$ のときに比較することになる．

以下の証明では，N は（ϵ に応じて）固定されていており，n だけが ∞ に動くことに注意しよう．

それでは証明に取り掛かろう．N，n を自然数とし，i を $0 \leq i \leq N-1$ を満たす整数とする．$N > a + b$ とする．

ステップ 1： s_1^n を掛けることによって，写像

$$\alpha : \Gamma_1 = H^0\left(\mathcal{X}, (Nn+i)\mathcal{L}\right) \longrightarrow \Gamma_2 = H^0\left(\widetilde{\mathcal{X}}, (Nn+i)\pi^*(\mathcal{L}) + n\mathcal{M}\right)$$

ができる．$V_1 = \Gamma_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，$V_2 = \Gamma_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおく．$\overline{\mathcal{L}}$，$\overline{\mathcal{M}}$ から定まる sup-ノルムによって V_1，V_2 はそれぞれ自然にノルム空間になる．このとき α のノルムは C_1^n でおさえられる．

ステップ２：　s_2^n を掛けることによって，写像

$$H^0\left(\widetilde{\mathcal{X}}, \{(N-a-b)n+i\}\pi^*(\mathcal{L})+n\mathcal{M}\right) \longrightarrow H^0\left(\widetilde{\mathcal{X}}, \{(N-b)n+i\}\pi^*(\mathcal{L})\right)$$

ができる． また，s_3^n を掛けることによって，写像

$$\begin{aligned}H^0\left(\widetilde{\mathcal{X}}, \{(N-b)n+i\}\pi^*(\mathcal{L})\right) &= H^0\left(\mathcal{X}, \{(N-b)n+i\}\mathcal{L}+\pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})\right)\\ &\longrightarrow H^0\left(\mathcal{X}, (Nn+i)\mathcal{L}\right)\end{aligned}$$

ができる．この 2 つの写像を合成することによって，

$$\beta : \Gamma_3 = H^0\left(\widetilde{\mathcal{X}}, \{(N-a-b)n+i\}\pi^*(\mathcal{L})+n\mathcal{M}\right) \longrightarrow \Gamma_1 = H^0\left(\mathcal{X}, (Nn+i)\mathcal{L}\right)$$

が作られる．$V_3 = \Gamma_3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおく．$\overline{\mathcal{L}}$，$\overline{\mathcal{M}}$ から定まる sup-ノルムによって V_3 も V_1 と同様にノルム空間になる．このとき β のノルムは $C_2^n C_3^n$ でおさえられる．

ステップ３：　$\chi_{\sup}(\Gamma_1)$ を上から評価しよう．$\alpha(V_1)$ には V_2 からの誘導位相を入れる．α は単射だから，(V_1, Γ_1) と $(\alpha(V_1), \alpha(\Gamma_1))$ を比較すると

$$\chi_{\sup}(\Gamma_1) \leq \chi_{\sup}(\alpha(\Gamma_1)) + n\,\mathrm{rk}(\Gamma_1)\log C_1$$

補題 3.6.1 を $(V,\Gamma) = (V_2,\Gamma_2)$, $(V',\Gamma') = (\alpha(V_1), \alpha(\Gamma_1))$ として適用すると

$$\chi_{\sup}(\alpha(\Gamma_1)) \leq \chi_{\sup}(\Gamma_2) + \log\left(\mathrm{rk}(\Gamma_2)!\right) + \left(\mathrm{rk}(\Gamma_2) - \mathrm{rk}(\Gamma_1)\right)(Nn+N+n)\log\left(\frac{1}{2}C_4\right)$$

が成り立つ． ここで $\chi_{\sup}(\Gamma_2)$ については，$(Nn+i)\pi^*(\mathcal{L})+n\mathcal{M}$ は $\widetilde{f} : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上 $\widetilde{f}$-豊富で，$c_1((Nn+i)\pi^*(\overline{\mathcal{L}})+n\overline{\mathcal{M}})$ は各点で正だから，定理 3.3.3 が使えて，

$$\begin{aligned}\chi_{\sup}(\Gamma_2) &= \frac{n^{d+1}}{(d+1)!}\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(N\pi^*\overline{\mathcal{L}}+\overline{\mathcal{M}})^{d+1}\right) + o_N(n^{d+1})\\ &= \frac{(Nn+i)^{d+1}}{(d+1)!}\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}) + O(N^d n^{d+1}) + o_N(n^{d+1})\end{aligned}$$

となる． ここで，$O(N^d n^{d+1})$ は $\left|\frac{O(N^d n^{d+1})}{N^d n^{d+1}}\right|$ が N，n，i に依らない定数で抑えられていることを意味し，$o_N(n^{d+1})$ は N を任意に固定したとき，$\left|\frac{o_N(n^{d+1})}{n^{d+1}}\right|$ が $n \to \infty$ のとき 0 に収束することを意味する．

一方，十分大きな任意の n と，十分大きな任意の N と，任意の $0 \leq i \leq N-1$ に対して，補題 3.6.4 から，$H^q(Y, \pi^*(L)^{\otimes(Nn+i)} \otimes M^{\otimes n} \otimes H) = 0 \quad (\forall q > 0)$ である．したがって，このとき，代数多様体に対するリーマン・ロッホの定理から

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(\Gamma_2) &= \dim_{\mathbb{Q}}(V_2)\\ &= \frac{n^d}{d!}\deg\left(((Nn+i)\pi^*(\mathcal{L}_{\mathbb{C}})+\mathcal{M}_{\mathbb{C}})^d\right) + o_N(n^{d-1})\\ &= \frac{(Nn+i)^d}{d!}\deg(\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^d) + O(N^{d-1}n^d) + o_N(n^{d-1})\end{aligned}$$

であり，また

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(\Gamma_1) &= \dim_{\mathbb{Q}}(V_1)\\ &= \frac{n^d}{d!}\deg((N\mathcal{L}_{\mathbb{C}})^d) + o_N(n^{d-1})\\ &= \frac{(Nn+i)^d}{d!}\deg((\mathcal{L}_{\mathbb{C}})^d) + O(N^{d-1}n^d) + o_N(n^{d-1})\end{aligned}$$

である．従って，

$$n\,\mathrm{rk}(\Gamma_1)\log C_1 = O(N^d n^{d+1}) + o_N(n^d)$$
$$\log(\mathrm{rk}(\Gamma_2)!) = O(N^d n^d)\log(O(N^d n^d)) = o_N(n^{d+1})$$
$$(\mathrm{rk}(\Gamma_2) - \mathrm{rk}(\Gamma_1))\,(Nn+N+n)\log\frac{C_4}{2} = O(N^d n^{d+1}) + o_N(n^d)$$

となるから，以上を合わせて，

$$\chi_{\sup}(\Gamma_1) \le \frac{(Nn+i)^{d+1}}{(d+1)!}\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}) + O(N^d n^{d+1}) + o_N(n^{d+1})$$

が成り立つ．

ステップ４： 今度は，$\chi_{\sup}(\Gamma_1)$ を下から評価しよう．$\beta(V_3)$ には V_1 からの誘導位相を入れる．β は単射だから，(V_3,Γ_3) と $(\beta(V_3),\beta(\Gamma_3))$ を比較すると，

$$\chi_{\sup}(\Gamma_3) \le \chi_{\sup}(\beta(\Gamma_3)) + n\,\mathrm{rk}(\Gamma_3)\log C_2C_3$$

である．補題 3.6.1 を $(V,\Gamma)=(V_1,\Gamma_1)$，$(V',\Gamma')=(\beta(V_3),\beta(\Gamma_3))$ として適用すると

$$\chi_{\sup}(\Gamma_1) \ge \chi_{\sup}(\beta(\Gamma_3)) - \log(\mathrm{rk}(\Gamma_1)!) - (\mathrm{rk}(\Gamma_1)-\mathrm{rk}(\Gamma_3))\,(Nn+N+n)\log\left(\frac{1}{2}C_4\right)$$

が成り立つ． 合わせて

$$\begin{aligned}\chi_{\sup}(\Gamma_1) \ge \chi_{\sup}(\Gamma_3) - n\,\mathrm{rk}(\Gamma_3)\log C_2C_3 - \log(\mathrm{rk}(\Gamma_1)!)\\ + (\mathrm{rk}(\Gamma_1)-\mathrm{rk}(\Gamma_3))\,(Nn+N+n)\log\left(\frac{1}{2}C_4\right)\end{aligned}$$

である．ここで $\chi_{\sup}(\Gamma_3)$ については，$\chi_{\sup}(\Gamma_2)$ と同様に定理 3.3.3 が使えて

$$\chi_{\sup}(\Gamma_3) = \frac{(Nn+i)^{d+1}}{(d+1)!}\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}) + O(N^d n^{d+1}) + o_N(n^{d+1})$$

となる．また，$\mathrm{rk}(\Gamma_3)$ についても，$\mathrm{rk}(\Gamma_1)$，$\mathrm{rk}(\Gamma_2)$ と同様に，十分大きな任意の n と，十分大きな任意の N と，任意の i に対して

$$\mathrm{rk}(\Gamma_3) = \frac{(Nn+i)^d}{d!}\deg((\mathcal{L}_{\mathbb{C}})^d) + O(N^{d-1}n^d) + o_N(n^{d-1})$$

である． 従って，ステップ 3 と同様の評価をして

$$\chi_{\sup}(\Gamma_1) \ge \frac{(Nn+i)^{d+1}}{(d+1)!}\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}) + O(N^d n^{d+1}) + o_N(n^{d+1})$$

が成り立つ．

ステップ５：　$\Gamma_1 = H^0\left(\widetilde{\mathcal{X}}, (Nn+i)\mathcal{L}\right)$ であるから，ステップ３とステップ４より

$$\chi_{\sup}\left(\mathcal{X}, (Nn+i)\overline{\mathcal{L}}\right) = \frac{(Nn+i)^{d+1}}{(d+1)!}\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}) + O(N^d n^{d+1}) + o_N(n^{d+1})$$

となる．

さて，任意の正の数 ϵ をとろう．まず，補助的に N を $O(N^d n^{d+1})$ が $\frac{\epsilon}{2}N^{d+1}n^{d+1}$ で抑えられるように，十分大きくとる．そしてこの N を固定する．次に，n_1 を十分大きくとって，任意の自然数 $n \geq n_1$ に対して，$o_N(n^{d+1})$ が $\frac{\epsilon}{2}N^{d+1}n^{d+1}$ で抑えられるようにとる．このとき，ϵ に対して，ある 自然数 n_2 が存在して（$n_2 = Nn_1$ でよい），任意の自然数 $n \geq n_2$ に対して

$$\left|\chi_{\sup}\left(\mathcal{X}, n\overline{\mathcal{L}}\right) - \frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})}{(d+1)!}n^{d+1}\right| \leq \epsilon n^{d+1}$$

が成り立つ． 従って，ようやく定理 3.3.1 が証明された． □

4. アデール計量と許容計量

4.1. アデール計量と交点数. F を代数的に閉じた付値体とし，X を F 上の射影多様体，L を X 上の直線束とする．L に計量を与えることとは，X 上の各 F 有理点 x 上の L のファイバー $L(x)$ に対して F ノルムを与えることとする．

F の付値を非アルキメデス的であるとし，A を F の付値環とする．$(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ を (X, L) のモデルとする．すなわち，$\mathcal{X}$ は $\mathrm{Spec}(A)$ 上の平坦な射影的整スキームで生成ファイバーが X となり，$\mathcal{L}$ は $\mathbb{Q}$-直線束で，ある正の整数 n があって，$\mathcal{L}^{\otimes n}$ は直線束になり生成ファイバー上では $L^{\otimes n}$ となるものとする．このとき，次のようにして L に計量 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ を与えることができる．任意の $x \in X(F)$ に対し，対応する $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(A)$ の切断を $\tilde{x}$ とする．このとき，$x^*L^{\otimes n} \cong \tilde{x}^*(\mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_A F$ であることに注意しよう．ここで，各 $l \in x^*L = L(x)$ に対し

$$\|l\|_{\mathcal{L}} := \inf_{a \in F^\times} \{ |a|^{-\frac{1}{n}} \mid al^n \in \tilde{x}^*(\mathcal{L}^{\otimes n}) \}$$

とおく．こうして決まった計量を，モデル $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ から導かれた計量と呼ぶ．

L 上の F-計量 $\|\cdot\|$ が連続かつ有界であるとは，(X, L) のモデル $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ が存在して，

$$\log \frac{\|\cdot\|}{\|\cdot\|_{\mathcal{L}}} : X(F) \to \mathbb{R}$$

が F-位相で連続かつ有界となることである．

K を代数体，O_K をその整数環とする．$K(\mathbb{C})$ を K の $\mathbb{C}$ への埋め込み全体とし，

$$M_K := (\mathrm{Spec}(O_K) \setminus \{(0)\}) \coprod K(\mathbb{C})$$

と置く．$v \in M_K$ に対し，K の付値 $|\cdot|_v$ が次のように定義される．各 $a \in K$ に対し $v = P \in \mathrm{Spec}(O_K) \setminus \{(0)\}$，つまり v が有限素点 P のときは，

$$|a|_v = \#(O_K/P)^{-\mathrm{ord}_P(a)},$$

$v = \sigma \in K(\mathbb{C})$，つまり v が無限素点 σ のときは，

$$|a|_v = |\sigma(a)|_{\mathbb{C}},$$

と置く．ここで，$|\cdot|_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}$ の普通の絶対値である．K_v を K の $|\cdot|_v$ についての完備化とし，$\overline{K}_v$ をその代数閉包とする．X を K 上の射影多様体，L を X 上の直線束とする．

定義 4.1.1. U を空でない $\mathrm{Spec}(O_K)$ の開集合とする．(X, L) の U **上のモデル**（*model over* U）とは，U 上射影的な算術的多様体 $\mathcal{X}_U$ と $\mathcal{X}_U$ 上の連続的なエルミート計量付き $\mathbb{Q}$-直線束 $\bar{\mathcal{L}}$ の組で，$\mathcal{X}_U$ の生成ファイバーは X となり，かつある正の整数 n があって直線束として $\mathcal{L}_K^{\otimes n} \cong L^{\otimes n}$ となるもののことである．さらに $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ のエルミート計量が C^∞ であるとき，$(\mathcal{X}_U, \bar{\mathcal{L}})$ を (X, L) の C^∞ **なモデル**（C^∞*-model*）と呼ぶ．

L の計量 $\|\cdot\| = \{\|\cdot\|_v\}_{v \in M_K}$ とは，$L \otimes_K \overline{K}_v$ 上の $\overline{K}_v$-計量の集まりのことである．L の計量のうち，次のものが重要である．

定義 4.1.2. L の計量 $\|\cdot\| = \{\|\cdot\|_v\}_{v \in M_K}$ が次の性質を持つとき，それは**アデール計量**（*adelic metric*）であると言われる．

(a) 任意の有限素点 $P \in \mathrm{Spec}(O_K) \setminus \{(0)\}$ に対して $\|\cdot\|_P$ は連続かつ有界であり，無限素点 σ については，$\|\cdot\|_\sigma$ が普通の意味で連続になる．

(b) 空でない部分開集合 $U \subset \operatorname{Spec}(O_K)$ と，(X, L) の U 上の モデル $(\mathcal{X}_U, \overline{\mathcal{L}})$ で $\mathcal{L}$ は 直線束で $\mathcal{L}_K = L$ となるものが存在して，任意の閉点 $P \in U \setminus \{(0)\}$ に対して $\|\cdot\|_P$ はモデル

$$(\mathcal{X}_P, \mathcal{L}_P) = (\mathcal{X} \times \operatorname{Spec}(\overline{O}_{K,P}), \mathcal{L} \otimes \overline{O}_{K,P})$$

によって導かれた計量になる．ここで，$\overline{O}_{K,P}$ は $\overline{K}_P$ の整数環である．

$(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{L}})$ を (X, L) の $\operatorname{Spec}(O_K)$ 上のモデルとする．モデルによって導かれた計量はアデール計量である．実際，明らかに条件 (a) は満たされる．条件 (b) を見るために，空でない部分開集合 $U \in \operatorname{Spec}(O_K)$ で $\mathcal{X}_U$ 上に直線束 L が延長されるものを取る．すると，この U と L の延長に対し条件 (b) が簡単に確かめられる．よって，導かれた計量はアデール計量である．

定義 4.1.3. $\|\cdot\|$ を L のアデール計量，$\{\|\cdot\|_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を L のアデール計量の列とする．$\{\|\cdot\|_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が $\|\cdot\|$ に収束するとは，空でない部分開集合 $U \subset \operatorname{Spec} O_K$ が存在して，任意の閉点 $P \in U \setminus \{(0)\}$ に対して $\|\cdot\|_{n,P} = \|\cdot\|_P$ となり，任意の $v \in M_K$ に対して

$$\log \frac{\|\cdot\|_{n,v}}{\|\cdot\|_v} : X(\overline{K}_v) \to \mathbb{R}$$

が一様に 0 に収束することである．

アデール計量付き直線束 $\bar{L}$ が，無限ファイバー上で滑らかな計量を持つモデルで近似されているとしても，$\bar{L}$ の無限素点での計量が滑らかであるとは限らないことに注意する．

定義 4.1.4. $\|\cdot\|$ を L のアデール計量とする．(X, L) の $\operatorname{Spec}(O_K)$ 上の C^∞ なモデルの列 $\{(\mathcal{X}_n, \bar{\mathcal{L}}_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ で $\bar{\mathcal{L}}_n$ は垂直的に豊富（垂直的にネフ）となり，$\|\cdot\|_{\bar{\mathcal{L}}_n}$ が $\|\cdot\|$ に収束するものが存在するとき，アデール計量 $\|\cdot\|$ を**垂直的に豊富**（**垂直的にネフ**）であるという．

また，アデール計量 $\|\cdot\|$ は次を満たすとき，**可積分**（*integrable*）であるという．

(1) $\|\cdot\|$ は，(X, L) の $\operatorname{Spec}(O_K)$ 上の C^∞ なモデルの列 $\{(\mathcal{X}_n, \bar{\mathcal{L}}_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ で近似されている．
(2) すべての n について，垂直的にネフな $\bar{\mathcal{A}}_n$ と $\bar{\mathcal{B}}_n$ が存在して，$\bar{\mathcal{L}}_n = \bar{\mathcal{A}}_n \otimes \bar{\mathcal{B}}_n^{-1}$ と書ける．
(3) 集合 $\{(\mathcal{A}_n)_K, (\mathcal{B}_n)_K\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\operatorname{NS}(X_K) \otimes \mathbb{R}$ の中で有界である．

定義から，垂直的にネフなアデール計量は可積分である．

さて，X を代数体 K 上の射影多様体とし，$d = \dim X + 1$ とおく．$\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_d$ を d 個の可積分なアデール計量付き直線束とする．定義より，各 $i = 1, 2, \ldots, d$ に対して，$\bar{L}_i$ は次を満たす $\operatorname{Spec}(O_K)$ 上のモデルの列 $\{(\mathcal{X}_{i,n}, \bar{\mathcal{L}}_{i,n})\}_{n=1,2,\ldots}$ によって近似されている．

(1) 任意の $\bar{\mathcal{L}}_{i,n}$ に対し，ある垂直的にネフな $\mathbb{Q}$-直線束 $\bar{\mathcal{A}}_{i,n}$ と $\bar{\mathcal{B}}_{i,n}$ が存在して $\bar{\mathcal{L}}_{i,n} = \bar{\mathcal{A}}_{i,n} \otimes \bar{\mathcal{B}}_{i,n}^{-1}$ となる．
(2) 集合 $\{(\mathcal{A}_{i,n})_K, (\mathcal{B}_{i,n})_K\}_{i=1,\ldots,d, n \in \mathbb{N}}$ は $\operatorname{NS}(X_K) \otimes \mathbb{R}$ の中で有界である．

$(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ に対し，$\mathcal{X}_{n_1,\ldots,n_d}$ を X のモデルで各 $\mathcal{X}_{i,n_i}$ を支配するものとする．$\bar{\mathcal{L}}_{i,n_i}$ の $\mathcal{X}_{n_1,\ldots,n_d}$ への引き戻しを同じ記号 $\bar{\mathcal{L}}_{i,n_i}$ で表す．

定理 4.1.5. 上の記号のもと，次が成立する．

(1) $c_{n_1,\ldots,n_d} = \widehat{\deg}\big(\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_{1,n_1}) \cdots \widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_{d,n_d})\big)$ は $n_1, \ldots, n_d \to \infty$ で収束する．さらに，この極限値はモデルの列の取り方に依らない．
(2) この極限値を $\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\bar{L}_1) \cdots \widehat{c}_1(\bar{L}_d))$ と書き，可積分なアーデル計量をもった直線束の交点数という．これは $\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_d$ について双線型になる．

証明： 二つの $(n_1,\dots,n_d),(n'_1,\dots,n'_d)\in\mathbb{N}^d$ を取る．$\mathcal{X}$ を二つのモデル $\mathcal{X}_{n_1,\dots,n_d}$ と $\mathcal{X}_{n'_1,\dots,n'_d}$ を支配するモデルとし， $\mathcal{X}$ への $\bar{\mathcal{L}}_{i,n_i}$ $\bar{\mathcal{A}}_{i,n_i},\bar{\mathcal{B}}_{i,n_i}$ の引き戻しを， それぞれ $\bar{\mathcal{L}}_i$，$\bar{\mathcal{A}}_i$，$\bar{\mathcal{B}}_i$ と置き，$\bar{\mathcal{L}}_{i,n'_i}$，$\bar{\mathcal{A}}_{i,n'_i}$，$\bar{\mathcal{B}}_{i,n'_i}$ の引き戻しをそれぞれ $\bar{\mathcal{L}}'_i$，$\bar{\mathcal{A}}'_i$，$\bar{\mathcal{B}}'_i$，と置く．$(\mathcal{X},\bar{\mathcal{L}}_i)$，$(\mathcal{X},\bar{\mathcal{L}}'_i)$ は共に (X,L_i) のモデルになっており，それらはそれぞれ $\bar{\mathcal{L}}_{i,n_i}$，$\bar{\mathcal{L}}_{i,n'_i}$ と同じ L_i の計量を導くことに注意する．示すべきことは，$\min\{n_1,\dots,n_d,n'_1,\dots,n'_d\}\to\infty$ の時，

$$|\widehat{\deg}\big(\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_1)\cdots\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_d)\big)-\widehat{\deg}\big(\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}'_1)\cdots\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}'_d)\big)|\to 0$$

となることである．

モデルの収束の定義より，$\mathrm{Spec}(O_K)$ の 空でない開集合 U で U の任意の有限素点 P では各 $i=1,\dots,d$ と任意の n,n' に対して $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{i,n},P}=\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{i,n'},P}$ となるものが存在する．

任意の正の数 ϵ に対し， n_k,n'_k を十分大きく取っておけば O_K の任意の素点 v に対し，

$$\left|\log\frac{\|\cdot\|_{\bar{\mathcal{L}}'_{k,v}}}{\|\cdot\|_{\bar{\mathcal{L}}_{k,v}}}\right|<\begin{cases}\epsilon\log\#(O_K/P) & v\text{ が有限素点 }P\text{ のとき，}\\ \epsilon & v\text{ が無限素点のとき，}\end{cases}$$

とできる．もし，P が U 内の有限素点なら，$k=1,\dots,d$ に対して $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_k,P}=\|\cdot\|_{\mathcal{L}'_k,P}$ となるので，$\log\frac{\|\cdot\|_{\bar{\mathcal{L}}'_{k,v}}}{\|\cdot\|_{\bar{\mathcal{L}}_{k,v}}}=0$ である．e_k を， $\mathcal{L}_k^{\otimes e_k}$，${\mathcal{L}'_k}^{\otimes e_k}$ が直線束となり生成ファイバー X 上では $L_k^{\otimes e_k}$ となるような正の整数とし，s_k を $\mathcal{L}_k^{\otimes e_k}\otimes\left({\mathcal{L}'_k}^{\otimes e_k}\right)^{-1}$ の有理切断で X 上に制限すると 1 を与えるものとする．

$$I_k=\widehat{\deg}\Big(\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}'_1)\cdots\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}'_{k-1})\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_{k+1})\cdots\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_d)\cdot\frac{1}{e_k}\widehat{\mathrm{div}}(s_k)\Big)$$

と置き， $|I_k|$ を評価したい．

$\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_{k-1},a_{k+1},\dots,a_d)\in\{0,1\}^{d-1}$ に対し，エルミート計量付き $\mathbb{Q}$-直線束 $\bar{\mathcal{M}}_i(\mathbf{a})$ を次で定義する．$1\le i\le k-1$ のときは

$$\bar{\mathcal{M}}_i(\mathbf{a})=\begin{cases}\bar{\mathcal{A}}'_i & a_i=0\text{ のとき，}\\ \bar{\mathcal{B}}'_i & a_i=1\text{ のとき，}\end{cases}$$

$k+1\le i\le d$ のときは

$$\bar{\mathcal{M}}_i(\mathbf{a})=\begin{cases}\bar{\mathcal{A}}_i & a_i=0\text{ のとき，}\\ \bar{\mathcal{B}}_i & a_i=1\text{ のとき．}\end{cases}$$

（a_i の番号の付け方に注意.）各 $\bar{\mathcal{M}}_i(\mathbf{a})$ は， 垂直的にネフであることに注意しておく．そこで，

$$\bar{J}_k(\mathbf{a})=\widehat{\deg}\Big(\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{M}}_1(\mathbf{a}))\cdots\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{M}}_{k-1}(\mathbf{a}))\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{M}}_{k+1}(\mathbf{a}))\cdots\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{M}}_d(\mathbf{a}))\cdot\frac{1}{e_k}\widehat{\mathrm{div}}(s_k)\Big)$$

と置く．

P を有限素点とすると， 任意の $x\in X(\overline{K})$ に対して

$$\#(O_K/P)^{-\epsilon e_k}<\|s_k\|_P(x)<\#(O_K/P)^{\epsilon e_k}$$

となる．$[\mathrm{div}(s_k)]_P$ を $\mathrm{div}(s_k)$ のうち P 上のファイバー $\mathcal{X}_P$ に台を持つ部分とし，既約かつ被約な成分 $V_{P,i}$ を用いて $[\mathrm{div}(s_k)]_P=\sum_i n_{P,i}V_{P,i}$ と書く．すると， モデルによって導かれた

計量の定義より $n_{P,i} < \epsilon e_k$，つまり

$$D_{P,1} = [\mathrm{div}(s_k)]_P + \epsilon e_k[\mathcal{X}_P]$$
$$D_{P,2} = -[\mathrm{div}(s_k)]_P + \epsilon e_k[\mathcal{X}_P]$$

は共に有効因子 (effective divisor) になることがわかる．ここで，$[\mathcal{X}_P]$ はファイバー $\mathcal{X}_P$ を因子とみなすことを示している．従って，各 $\bar{\mathcal{M}}_i(\mathbf{a})$ が垂直的にネフであることに注意すれば，$i = 1, 2$ に対して

$$c_1(\mathcal{M}_1(\mathbf{a})|_{D_{P,i}}) \cdots c_1(\mathcal{M}_{k-1}(\mathbf{a})|_{D_{P,i}}) c_1(\mathcal{M}_{k+1}(\mathbf{a})|_{D_{P,i}}) \cdots c_1(\mathcal{M}_d(\mathbf{a})|_{D_{P,i}}) \geq 0$$

がわかる．これは，$\bar{J}_k(\mathbf{a})$ の P での寄与の絶対値は，

$$\epsilon\big(\log \#(O_K/P)\big) c_1(M_1(\mathbf{a})) \cdots c_1(M_{k-1}(\mathbf{a})) c_1(M_{k+1}(\mathbf{a})) \cdots c_1(M_d(\mathbf{a}))$$

で抑えられることを意味している．ここで，$M_i(\mathbf{a})$ は $\mathcal{M}_1(\mathbf{a})$ の生成ファイバー X への制限である．今，仮定より $\{(\mathcal{A}_{i,n})_K, (\mathcal{B}_{i,n})_K\}_{i=1,\ldots,d, n\in\mathbb{N}}$ は $\mathrm{NS}(X_K) \otimes \mathbb{R}$ の中で有界であることに注意すれば，一番初めに固定した $(n_1, \ldots, n_d)$ や $(n'_1, \ldots, n'_d)$ には依らない定数 C が存在して，

$$c_1(M_1(\mathbf{a})) \cdots c_1(M_{k-1}(\mathbf{a})) c_1(M_{k+1}(\mathbf{a})) \cdots c_1(M_d(\mathbf{a})) \leq C$$

となる．従って，$\bar{J}_k(\mathbf{a})$ の P での寄与の絶対値は

$$\epsilon \log \#(O_K/P) C$$

で抑えられる．

次に，σ を無限素点とすると $\bar{J}_k(\mathbf{a})$ の σ の寄与は，

$$-\frac{1}{e_k}\int \log \|s_k\|_\sigma c_1(\bar{\mathcal{M}}_{1,\sigma}(\mathbf{a})) \cdots c_1(\bar{\mathcal{M}}_{k-1,\sigma}(\mathbf{a})) c_1(\bar{\mathcal{M}}_{k+1,\sigma}(\mathbf{a})) \cdots c_1(\bar{\mathcal{M}}_{d,\sigma}(\mathbf{a}))$$

で与えられる．ここで，$c_1(\cdot)$ は曲率である．今，仮定より曲率は全て半正であり $|\log \|s_k\|_\sigma| < \epsilon e_k$ であることに注意すれば，先程と同様にこれらの絶対値は

$$c_1(M_1(\mathbf{a})) \cdots c_1(M_{k-1}(\mathbf{a})) c_1(M_{k+1}(\mathbf{a})) \cdots c_1(M_d(\mathbf{a}))$$

で抑えられ，ϵC で抑えられる．

以上より

$$\bar{J}_k(\mathbf{a}) \leq \epsilon C \left(\sum_{P \notin U} \log \#(O_K/P) + [K : \mathbb{Q}] \right)$$

が得られた．これより，

$$
\begin{aligned}
&\left|\widehat{\deg}\big(\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_1)\cdots\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_d)\big)-\widehat{\deg}\big(\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}'_1)\cdots\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}'_d)\big)\right|\\
\leq&\sum_{k=1}^{d}\left|\widehat{\deg}\big(\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}'_1)\cdots\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}'_{k-1})\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_k\otimes(\bar{\mathcal{L}}'_k)^{-1})\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_{k+1})\cdots\widehat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_d)\big)\right|\\
=&\sum_{k=1}^{d}|I_k|\\
\leq&\sum_{k=1}^{d}\sum_{\mathbf{a}\in\{0,1\}^{d-1}}|\bar{J}_k(\mathbf{a})|\\
\leq&\epsilon 2^{d-1}dC\left(\sum_{P\notin U}\log\#(O_K/P)+[K:\mathbb{Q}]\right)
\end{aligned}
$$

となり， 収束は示された．この収束値を c と置く．

$\{(\mathcal{X}'_{i,n},\bar{\mathcal{L}}'_{i,n})\}_n$ を別のモデルの列とし， このモデルから上の議論で得られた収束値を c' と置く． モデルの列

$$(\mathcal{X}_{i,1},\bar{\mathcal{L}}_{i,1}),(\mathcal{X}'_{i,1},\bar{\mathcal{L}}'_{i,1}),(\mathcal{X}_{i,2},\bar{\mathcal{L}}_{i,2}),(\mathcal{X}'_{i,2},\bar{\mathcal{L}}'_{i,2}),(\mathcal{X}_{i,3},\bar{\mathcal{L}}_{i,3}),\ldots$$

を考えると，これも収束するから上の議論で得られた収束値 c'' が得られる．しかし， $c=c''$, $c'=c''$ とならなければならないので $c=c'$ を得る．以上で (1) は示された．

(2) は定義よりただちにわかる． □

4.2. 許容計量と立方計量． F を代数的に閉じた付値体， X を F 上の射影多様体，$\bar{L}=(L,\|\cdot\|)$ を連続かつ有界な計量の入った X 上の直線束とする． $f:X\to X$ を全射， $\phi:L^{\otimes d}\xrightarrow{\sim}f^*L$ $(d>1)$ を同型とする．このとき， L の計量 $\|\cdot\|_n$ を次のように定める．

$$\|\cdot\|_1=\|\cdot\|,\quad \|\cdot\|_n=\big(\phi^*f^*\|\cdot\|_{n-1}\big)^{\frac{1}{d}}.$$

すると， 次の定理がある．

定理 4.2.1. (1) $\{\|\cdot\|_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は，ある計量 $\|\cdot\|_0$ に一様収束する．

(2) $\|\cdot\|_0$ は， $\|\cdot\|_0=\big(\phi^*f^*\|\cdot\|_0\big)^{1/d}$ を満たす唯一の連続かつ有界な計量である．

(3) $\lambda\in F^\times$ に対し ϕ を $\lambda\phi$ に変えると，$\|\cdot\|_0$ は $|\lambda|^{1/(d-1)}\|\cdot\|_0$ に変わる．

この計量 $\|\cdot\|_0$ を**許容計量**（*admissible metric*）と呼ぶ．

証明： (1)

$$h:=\log\frac{\|\cdot\|_2}{\|\cdot\|_1}$$

とおく．すると

$$\log\frac{\|\cdot\|_n}{\|\cdot\|_{n-1}}=\left(\frac{1}{d}\phi^*f^*\right)^{n-2}(h)$$

となるから，

$$\log \frac{\|\cdot\|_n}{\|\cdot\|_1} = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{d}\phi^* f^*\right)^k (h)$$

を得る．ここで $\|\big((1/d)\phi^* f^*\big)^k (h)\|_{\mathrm{sup}} = (1/d^k)\|h\|_{\mathrm{sup}}$ ゆえ，$\log \frac{\|\cdot\|_n}{\|\cdot\|_1}$ は $X(F)$ 上一様にある関数 h_0 に収束する．$\|\cdot\|_0 := e^{h_0}\|\cdot\|_1$ と置けば，$\|\cdot\|_n$ は $\|\cdot\|_0$ に一様収束する．

(2) $\|\cdot\|_0$ は，作り方より，条件を満たす連続かつ有界な計量であることはよい．$\|\cdot\|_0'$ も条件を満たす連続かつ有界な計量であるとする．$g := \log \frac{\|\cdot\|_0}{\|\cdot\|_0'}$ と置くと，g は $X(F)$ 上連続かつ有界な関数であり $\big((1/d)\phi^* f^*\big)(g) = g$ となる．従って $\|g\|_{\mathrm{sup}} = (1/d)\|g\|_{\mathrm{sup}}$ となり，$d > 1$ ゆえ $\|g\|_{\mathrm{sup}} = 0$． よって $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_0'$．

(3) $\alpha\|\cdot\|_0$ を $\lambda\phi$ に関して定理の条件を満たす計量とする．f^*L 上の計量 $f^*\|\cdot\|_0$ を $\|\cdot\|_{0,f}$ で表す． すると，$x \in X(F)$ と x での L の局所切断 l に対し，

$$\begin{aligned}
\alpha\|l(x)\|_0 &= \big(\alpha\|\lambda\phi(l^d)(x)\|_{0,f}\big)^{\frac{1}{d}} \\
&= \big(\alpha|\lambda|\big)^{\frac{1}{d}} \big(\|\phi(l^d)(x)\|_{0,f}\big)^{\frac{1}{d}} \\
&= \big(\alpha|\lambda|\big)^{\frac{1}{d}} \|l(x)\|_0
\end{aligned}$$

となる．従って $\alpha = \big(\alpha|\lambda|\big)^{1/d}$ となり結論を得る． □

次に代数体上で考えよう．K を代数体，X を K 上の射影多様体，L を X 上の豊富な直線束とする．全射 $f : X \to X$ と同型 $\phi : L^{\otimes d} \xrightarrow{\sim} f^*L$ $(d > 1)$ が与えられているとする．このとき，L が豊富だから f は 次数 $d^{\dim X}$ の有限射になっている．(X, L) の $\mathrm{Spec}\, O_K$ 上のモデル $(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{L}})$ で，$\bar{\mathcal{L}}$ が垂直的に豊富となるようなものを固定する．$\|\cdot\|$ を $(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{L}})$ から導かれた L の計量，e を $\mathcal{L}^{\otimes e}$ が直線束となり X 上では $L^{\otimes e}$ と等しくなるような自然数とする．すると，ある空でない開集合 $U \subset \mathrm{Spec}\, O_K$ と全射 $f_U : \mathcal{X}_U \to \mathcal{X}_U$, 同型 $\phi_U^{\otimes e} : (\mathcal{L}^{\otimes e})^{\otimes d} \to f_U^*(\mathcal{L}^{\otimes e})$ が存在する．各素点 v に対して， 定理によって $\|\cdot\|_{v,0} = \big(\phi^* f^* \|\cdot\|_{v,0}\big)^{1/d}$ となる計量が得られるが，U 内の有限素点 P に対しては計量の構成法により $\|\cdot\|_P = \big(\phi^* f^* \|\cdot\|_P\big)^{1/d}$ が満たされている．従って，$\|\cdot\|_n = \big(\phi^* f^* \|\cdot\|_{n-1}\big)^{1/d}$ で定義される L のアデール計量の列はある L のアデール計量 $\|\cdot\|_0$ で $\|\cdot\|_0 = \big(\phi^* f^* \|\cdot\|_0\big)^{1/d}$ となるものに収束する．次に，こうして決まった計量 $\|\cdot\|_0$ が垂直的にネフになることを示そう．$\tilde{f}_n : \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}$ を合成射

$$\mathcal{X}_U \xrightarrow{f_U^n} \mathcal{X}_U \hookrightarrow \mathcal{X}$$

の正規化とする．$\bar{\mathcal{L}}_n$ を $\mathcal{X}_n$ 上の計量付き $\mathbb{Q}$-直線束 $\tilde{f}_n^* \bar{\mathcal{L}}$ とする．$\big(\mathcal{X}_n, \bar{\mathcal{L}}_n^{\otimes(1/d^n)}\big)$ は (X, L) のモデルで $\bar{\mathcal{L}}_n^{\otimes(1/d^n)}$ は垂直的にネフであり，これによって導かれた計量は上の $\|\cdot\|_n$ に他ならないことがわかる．従って，各 $\|\cdot\|_n$ は垂直的にネフな計量で，その極限である $(L, \|\cdot\|_0)$ は垂直的にネフである．

さて，X がアーベル多様体のときは，もっと一般に立方計量と呼ばれるものが定義できる．

F を代数的に閉じた付値体とし，A を F 上のアーベル多様体，L を A 上の直線束とする．$A \times A \times A$ から A への射 $s_{1,2,3}$, $s_{1,2}$, $s_{2,3}$, $s_{3,1}$, s_i $(i = 1, 2, 3)$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} s_{1,2,3}(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3, \\ s_{i,j}(x_1, x_2, x_3) &= x_i + x_j, \\ s_i(x_1, x_2, x_3) &= x_i. \end{aligned}$$

ここで，

$$\mathrm{Cub}(L) = s^*_{1,2,3}(L) \otimes s^*_{1,2}(L^{-1}) \otimes s^*_{2,3}(L^{-1}) \otimes s^*_{3,1}(L^{-1}) \otimes s^*_1(L) \otimes s^*_2(L) \otimes s^*_3(L)$$

と置く．このとき，立方定理よりある同型

$$\phi_L : \mathcal{O}_{A\times A\times A} \to \mathrm{Cub}(L)$$

が存在する．もし L に計量 $\|\cdot\|$ があれば，計量の引き戻しにより自然に $\mathrm{Cub}(L)$ には計量が入るので，それを $\mathrm{Cub}(\bar{L}) = \mathrm{Cub}((L, \|\cdot\|))$ と書く．$\mathrm{Cub}(\bar{L})$ の計量を ϕ_L で引き戻すことによって，$\mathcal{O}_{A\times A\times A}$ 上の計量 $\|\cdot\|_{\phi_L}$ が得られる．

定義 4.2.2. $|\cdot|_{\mathrm{can}}$ を $\mathcal{O}_{A\times A\times A}$ の標準的な計量とする．L の連続かつ有界な計量 $\|\cdot\|$ が**立方計量**（*cubic metric*）であるとは，ある正の数 c があって $\|\cdot\|_{\phi_L} = c|\cdot|_{\mathrm{can}}$ となることである．

付値がアルキメデス的なとき，この概念は [19] にある．L の計量 $\|\cdot\|$ が立方計量であるということは，同型 ϕ_L の取り方に依らないことを注意しておく．

次の命題は基本的である．

命題 4.2.3. L を A 上の任意の直線束とする．

(1) L の立方計量は存在する．

(2) $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ が L の立方計量なら，ある正の数 c が存在して $\|\cdot\|_1 = c\|\cdot\|_2$ となる．

証明： (1) まず，L が対称的（symmetric），つまり $[-1]^*L \cong L$ の場合を考える．同型 $\psi : [2]^*L \to L^{\otimes 4}$ を一つ固定しよう．$[2] : A \to A$ と ψ に関する許容計量を $\|\cdot\|$ と置き，$\bar{L} = (L, \|\cdot\|)$ を考える．このとき，次の計量付き直線束の同型が得られる．

$$\begin{aligned} [2]^*\mathrm{Cub}(\bar{L}) &= [2]^*\big(s^*_{1,2,3}(\bar{L}) \otimes s^*_{1,2}(\bar{L}^{-1}) \otimes s^*_{2,3}(\bar{L}^{-1}) \otimes s^*_{3,1}(\bar{L}^{-1}) \otimes s^*_1(\bar{L}) \otimes s^*_2(\bar{L}) \otimes s^*_3(\bar{L})\big) \\ &= s^*_{1,2,3}[2]^*(\bar{L}) \otimes s^*_{1,2}[2]^*(\bar{L}^{-1}) \otimes s^*_{2,3}[2]^*(\bar{L}^{-1}) \otimes s^*_{3,1}[2]^*(\bar{L}^{-1}) \\ &\qquad \otimes s^*_1[2]^*(\bar{L}) \otimes s^*_2[2]^*(\bar{L}) \otimes s^*_3[2]^*(\bar{L}) \\ &\cong s^*_{1,2,3}(\bar{L}^{\otimes 4}) \otimes s^*_{1,2}(\bar{L}^{-4}) \otimes s^*_{2,3}(\bar{L}^{-4}) \otimes s^*_{3,1}(\bar{L}^{-4}) \otimes s^*_1(\bar{L}^{\otimes 4}) \otimes s^*_2(\bar{L}^{\otimes 4}) \otimes s^*_3(\bar{L}^{\otimes 4}) \\ &= \mathrm{Cub}(\bar{L})^{\otimes 4} \end{aligned}$$

これは，$\mathrm{Cub}(\bar{L})$ の計量は，

$$[2] : A \times A \times A \to A \times A \times A$$

と

$$s^*_{1,2,3}(\psi) \otimes s^*_{1,2}(\psi') \otimes s^*_{2,3}(\psi') \otimes s^*_{3,1}(\psi') \otimes s^*_1(\psi) \otimes s^*_2(\psi) \otimes s^*_3(\psi) : [2]^*\mathrm{Cub}(\bar{L}) \to \mathrm{Cub}(\bar{L})^{\otimes 4}$$

に関する許容計量であることを示している．ここで，ψ' は ψ から 自然に決まる同型 $\psi' : [2]^*L^{-1} \to L^{\otimes -4}$ である．これは，ϕ_L を通して $\mathcal{O}_{A\times A\times A}$ の許容計量になるが，それは $c|\cdot|_{\mathrm{can}}$ の形でなければならない．従って，この $\|\cdot\|$ は L の立方計量である．

次に，$[-1]^*L \cong L^{-1}$ であるときも $[2]^*L \cong L^{\otimes 2}$ となるから，同様にして立方計量が構成される．

任意の直線束 M は，$[-1]^*M_1 \cong M_1$ なる直線束 M_1 と $[-1]^*M_2 \cong M_2^{-1}$ なる直線束 M_2 のテンソル積で書ける．M_1 の立方計量と M_2 の立方計量の積で M に計量を入れると，それが立方計量となることは，$\mathrm{Cub}(\bar{M}_1) \otimes \mathrm{Cub}(\bar{M}_2) = \mathrm{Cub}(\bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2)$ となることより明らかである．

(2) $\mathrm{Cub}(\mathcal{O}_A, \|\cdot\|)$ の計量が標準的な計量の定数倍になるなら，$\|\cdot\|$ も標準的な計量の定数倍になることを示せば十分である．$\mathcal{O}_A$ の大域切断 1 に対し，$\lambda : A(F) \to \mathbb{R}_{>0}$ を $x \mapsto \|1\|(x)$ で定義する．$\|\cdot\|$ は連続かつ有界であるから，λ もそうである．今，$\mathrm{Cub}(\mathcal{O}_A, \|\cdot\|)$ の計量が標準的な計量の定数倍であるから，

$$\frac{\lambda(x+y+z)\lambda(x)\lambda(y)\lambda(z)}{\lambda(x+y)\lambda(y+z)\lambda(z+x)} = \lambda(0)$$

となる．従って，$A \times A$ から $\mathbb{R}_{>0}$ への写像

$$(x, y) \mapsto \frac{\lambda(x+y)\lambda(0)}{\lambda(x)\lambda(y)}$$

は $\mathbb{Z}$-双線型であり，これは連続かつ有界であることより

$$\frac{\lambda(x+y)\lambda(0)}{\lambda(x)\lambda(y)} \equiv 1$$

を得る．そこで

$$x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\lambda(0)}$$

を考えると，これは $\mathbb{Z}$-線型である．再び連続かつ有界であることに注意すれば $\lambda(x) \equiv \lambda(0)$ を得，$\|\cdot\| = \lambda(0)|\cdot|_{\mathrm{can}}$ が示された． □

上の命題の (1) の証明より，もし直線束の間の同型 $\psi : [n]^*L \cong L^{\otimes n}$ が与えられていれば，それに関する許容計量は立方計量であることは明らかである．

最後に，$F = \mathbb{C}$ のとき，立方計量および許容計量がどのようなものか見てみよう．

A を $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体とする．$\pi : \mathbb{C}^g \to A$ を A の普遍被覆で $\mathbb{C}^g$ の標準的な和と A の演算を保つものとする．$\mathbb{C}^g$ の座標 $z_1, \dots, z_g$ を固定する．$dz_1, \dots, dz_g, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_g$ は A の 1-形式を表す．(L, h) を C^∞-エルミート計量とする．すると，$\mathbb{C}$-係数行列 $(c_{i,j})_{i,j=1,\dots,g}$ で $\bar{c}_{i,j} = c_{j,i}$ となるものと 1-形式 η が存在して

$$c_1(L, h) = \sum_{i,j} c_{i,j}\sqrt{-1}dz_i \wedge d\bar{z}_j + d\eta$$

と書ける．よって，dd^c-補題より，ある $\mathbb{R}$-値 C^∞-関数 f が存在して，

$$c_1(L, h) = \sum_{i,j} c_{i,j}\sqrt{-1}dz_i \wedge d\bar{z}_j + dd^c f$$

となる．そこで $h_1 = e^f h$ と置けば

$$c_1(L, h_1) = \sum_{i,j} c_{i,j}\sqrt{-1}dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

となる．この h_1 が立方計量になることは簡単な計算問題である．以上のことより，任意の直線束 L に対しその立方計量は C^∞ となり，もし L が豊富ならその立方計量の曲率形式は正定値になることがわかった．特に，L が対称的なら任意の同型 $[2]^*L \cong L^{\otimes 4}$ に対する許容計量は C^∞ で曲率形式は正定値となる．

5. 算術的な高さ関数

5.1. 算術的な高さ関数の定義と諸性質. §1 と重複するが，ここでまず高さ関数の定義を復習しておこう．

K を代数体とし，O_K をその整数環とする．$K(\mathbb{C})$ で K の $\mathbb{C}$ への埋め込み全体を表すことにする．$\mathcal{L}$ を $\mathrm{Spec}(O_K)$ 上の直線束とする．つまり，$\mathcal{L}$ は階数が 1 の射影的な O_K-加群である．$\sigma \in K(\mathbb{C})$ に対して，$\mathcal{L}_\sigma$ で $\sigma : O_K \to \mathbb{C}$ によるテンソル $\mathcal{L} \otimes_{O_K} \mathbb{C}$ を表すことにする．$\mathcal{L}$ のエルミート計量を与えるとは，各 $\sigma \in K(\mathbb{C})$ に対して，$\mathcal{L}_\sigma$ にエルミート計量 $\|\cdot\|_\sigma$ を与えることとする．$\{\|\cdot\|_\sigma\}_{\sigma \in K(\mathbb{C})}$ を単に $\|\cdot\|$ と書き，$\mathcal{L}$ と $\|\cdot\|$ の対 $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ を簡単にため $\overline{\mathcal{L}}$ と書き，これを $\mathrm{Spec}(O_K)$ 上のエルミート直線束という．$s \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ に対して，次の量

$$\log \#(\mathcal{L}/s\mathcal{L}) - \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \log \|s\|_\sigma$$

を考えると，これは積公式を用いて s のとり方によらないことがわかる．そこで，これを $\widehat{\deg}(\overline{\mathcal{L}})$ で表す.

さて，$\mathcal{X}$ を $\mathrm{Spec}(O_K)$ 上の射影的な算術的多様体とする．$x \in \mathcal{X}_K(\overline{K})$ とし，Δ_x で $\mathrm{Spec}(\overline{K}) \to \mathcal{X}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{X}$ の像の閉包を表すことにする．さらに，$\overline{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{X}$ 上の連続的なエルミート直線束とする．つまり，各 $\sigma \in K(\mathbb{C})$ に対して，$\mathcal{X}_\sigma = \mathcal{X} \otimes_{O_K} \mathbb{C}$ 上の直線束 $\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L} \otimes_{O_K} \mathbb{C}$ に連続的なエルミート計量を与えたものである．このとき，

$$h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(x) = \frac{\widehat{\deg}\left((\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})\big|_{\Delta_x} \right)}{[K(x) : K]}$$

とおく．ここで，正確にいうと，$\widehat{\deg}\left((\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})\big|_{\Delta_x} \right)$ は，$\widetilde{\Delta}_x$ を Δ_x の正規化としたとき，

$$\widehat{\deg}\left((\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})\big|_{\widetilde{\Delta}_x} \right)$$

を意味する．これを，$x \in \mathcal{X}_K(\overline{K})$ の $(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})$ に関する高さという．

ここで，次の命題を考える．簡単のため，$X = \mathcal{X}_K$，$L = \mathcal{L}_K$ とおく．

命題 5.1.1. $\mathrm{Supp}\,(\mathrm{Coker}(H^0(X, L) \otimes \mathcal{O}_X \to L))$ を $\mathrm{Bs}(L)$ で表すとき，ある定数 C が存在して，$h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(x) \geq C$ がすべての $x \in (X \setminus \mathrm{Bs}(L))(\overline{K})$ について成立する．

証明：　$\{s_1, \dots, s_l\}$ を O_K-加群としての $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ の生成系とする．ここで，

$$a = \max_{\substack{1 \leq i \leq l \\ \sigma \in K(\mathbb{C})}} \{\sup \|s_i\|_\sigma\}$$

とおく．$x \in (X \setminus \mathrm{Bs}(L))(\overline{K})$ とする．このとき，ある i が存在して，$s_i(x) \neq 0$ である．これは，

$$\widehat{\deg}\left((\mathcal{L}, (1/a)\|\cdot\|)|_{\Delta_P} \right) \geq 0$$

を示している．つまり，

$$h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(x) \geq -[K : \mathbb{Q}] \log(a)$$

である． □

系 5.1.2. $L \simeq \mathcal{O}_X$ とすると，ある定数 C が存在して，$|h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(x)| \leq C$ がすべての $x \in X(\overline{K})$ について成り立つ.

証明： 命題 5.1.1 を $\overline{\mathcal{L}}$ と $\overline{\mathcal{L}}^{\otimes -1}$ に適用すればよい. □

系 5.1.3. $(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})$ と $(\mathcal{X}', \overline{\mathcal{L}}')$ を (X, L) の二つのモデルとする．このとき，ある定数 C が存在して，

$$|h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(x) - h_{(\mathcal{X}',\overline{\mathcal{L}}')}(x)| \leq C$$

がすべての $x \in X(\overline{K})$ について成立する.

証明： $\mathcal{X}''$ を $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}''$ の結合とし，$\mu : \mathcal{X}'' \to \mathcal{X}$ と $\mu' : \mathcal{X}'' \to \mathcal{X}'$ を自然な射とする．このとき，

$$h_{(\mathcal{X}'',\mu^*(\overline{\mathcal{L}}))} = h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})} \quad \text{と} \quad h_{(\mathcal{X}'',(\mu')^*(\overline{\mathcal{L}}'))} = h_{(\mathcal{X}',\overline{\mathcal{L}}')}$$

が成り立つことが容易にわかる．一方，$\mu^*(\overline{\mathcal{L}})$ と $(\mu')^*(\overline{\mathcal{L}}')$ は $\mathcal{X}'' \to B$ の生成ファイバー上で一致する．よって，系 5.1.2 より，ある定数 C が存在して，

$$|h_{(\mathcal{X}'',\mu^*(\overline{\mathcal{L}}))} - h_{(\mathcal{X}'',(\mu')^*(\overline{\mathcal{L}}'))}| \leq C$$

である．したがって，系を得た. □

$Fun(X(\overline{K}), \mathbb{R})$ で $X(\overline{K})$ 上の実数値関数全体を表し，$BFun(X(\overline{K}), \mathbb{R})$ で $X(\overline{K})$ 上の有界な実数値関数全体を表すことにする．上の系により，$h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}$ の $Fun(X(\overline{K}), \mathbb{R})/BFun(X(\overline{K}), \mathbb{R})$ におけるクラスはそのモデル $(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})$ の取り方に依らずに定まる．そこで，有界関数をモジュローにしたクラスを $h_{(X,L)}$ または h_L と書く．ここでは証明しないが，次のノースコットの定理は重要である.（例えば，Lang [18] または Serre [25] を見よ.）

定理 5.1.4. L が豊富であると仮定する．このとき，任意の M と d に対して，

$$\{x \in X(K) \mid [K(x) : K] \leq d, \quad h_L(x) \leq M\}$$

は有限集合である．ここで，h_L は記法の乱用で h_L の代表元の一つを表しているとする．いずれにせよ，上の主張は h_L の代表元のとり方に依らない.

5.2. **アーベル多様体上の高さ関数.** K を代数体，A を K 上のアーベル多様体とする．さらに，L を A 上の直線束とする．h_L を L に付随する高さ関数とする．h_L は有界関数をモジュローとしたクラスであるので，よい代表元を選ぶこと考える．立法定理（cubic theorem）と系 5.1.2 を用いると，

$$h_L(x+y+z) - h_L(x+y) - h_L(y+z) - h_L(z+x) + h_L(x) + h_L(y) + h_L(z)$$

は有界関数である．ここで，次の補題はよく知られている（例えば，[18]）.

補題 5.2.1. G をアーベル群，$f : G \to \mathbb{R}$ を G 上の関数とする．ここで，

$$f(x+y+z) - f(x+y) - f(y+z) - f(z+x) + f(x) + f(y) + f(z)$$

は有界関数とする．このとき，ある G 上の二次形式 q と 一次形式 l が一意的に存在して，$f(x) = q(x) + l(x) + O(1)$ と書ける.

この補題を用いると，ある $A(\overline{K})$ 上の二次形式 q_L と 一次形式 l_L が存在して，

$$h_L \equiv q_L + l_L \qquad (\mathrm{mod}\ BFun(A(\overline{K}), \mathbb{R}))$$

となる．そこで，$q_L + l_L$ を $\hat{h}_L$ と書き，L の**標準的な高さ関数**（*canonical height function*），あるいは，**ネロン・テートの高さ関数** と呼ぶ．もし，L が対称的，すなわち，$[-1]^*(L) = L$ であるなら，$l_L = 0$ となり，$\hat{h}_L$ は二次形式となる．最後に，次の命題を考えよう．

命題 5.2.2. L を対称的で豊富な直線束とする．このとき，次が成立する．

(1) すべての $x \in A(\overline{K})$ に対して，$\hat{h}_L(x) \geq 0$ である．
(2) $x \in A(\overline{K})$ について，$\hat{h}_L(x) = 0$ となる必要十分条件は $x \in A(\overline{K})_{tor}$ である．

証明：　(1) 定義から，簡単に $\hat{h}_{L^{\otimes n}} = n\hat{h}_L$ であることがわかるので，L は大域切断で生成されているとしてよい．したがって，命題 5.1.1 により，ある定数 C が存在して，$\hat{h}_L(x) \geq C$ がすべての $x \in A(\overline{K})$ について成立する．ここで，$\hat{h}_L$ は二次形式であるので，任意の正の整数 n について，

$$n^2\hat{h}_L(x) = \hat{h}_L(nx) \geq C$$

である．よって，$n \to \infty$ として，$\hat{h}_L(x) \geq 0$ を得る．

(2) $x \in A(\overline{K})_{tor}$ なら $\hat{h}_L(x) = 0$ であることは，$\hat{h}_L$ が二次形式であることを用いれば，明らかである．そこで，$\hat{h}_L(x) = 0$ と仮定する．いま，x から生成される部分群 $\langle x \rangle = \{nx \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を考える．$\hat{h}_L(nx) = n^2\hat{h}_L(x) = 0$ であるので，ノースコットの定理 (定理 5.1.4) から，$\langle x \rangle$ は有限群であることがわかる．よって，$x \in A(\overline{K})_{tor}$ である．□

5.3. **アデール計量と高さ関数.** X を K 上の射影的な代数多様体とし，L を X 上の直線束とする．$\|\cdot\|$ を L のアデール計量とする．$(X, \overline{L})$ は，連続的なモデルの列 $\{(\mathcal{X}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)\}$ の極限として表せているとする．ここで，$\mathcal{X}_n$ は $\mathrm{Spec}(O_K)$ 上の射影的な算術的多様体で，その生成ファイバーは X となっているものである．さらに，$\overline{\mathcal{L}}_n$ は $\mathcal{X}_n$ 上の連続的なエルミート $\mathbb{Q}$-直線束で，生成ファイバー上では L になっているものである．このとき，次の命題が成立する．

命題 5.3.1. 任意の正の数 ϵ に対して，ある N が存在して，任意の $n, m \geq N$ と任意の $x \in X(\overline{K})$ に対して，

$$|h_{(\mathcal{X}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)}(x) - h_{(\mathcal{X}_m, \overline{\mathcal{L}}_m)}(x)| \leq \epsilon$$

が成り立つ．特に，$h_{(X,\overline{L})}(x) = \lim_{n\to\infty} h_{(\mathcal{X}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)}(x)$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X(\overline{K})} |h_{(\mathcal{X}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)}(x) - h_{(X,\overline{L})}(x)| = 0$$

となる．

証明：　証明は，定理 4.1.5 と本質的に同じ（むしろ簡単）であるが，読者の便宜を考えてあえて証明を与えておく．

まず，$\mathrm{Spec}(O_K)$ の空でないザリスキ開集合 U が存在して，U 上では $(\mathcal{X}_n, \mathcal{L}_n)$ はすべて一致する．$S = \mathrm{Spec}(O_K) \setminus U$ とおく．$P \in S$ に対して，モデル $(\mathcal{X}_n, \mathcal{L}_n)$ から導きだせる P 上

に距離を $\|\cdot\|_{P,n}$ と書くことにする．$\#(S) < \infty$ であるので，任意の正の数 ϵ に対して，ある N が存在して，任意の $n, m \geq N$ と $P \in S$ について，

$$\sup \left| \log \left(\frac{\|\cdot\|_{P,n}}{\|\cdot\|_{P,m}} \right) \right| \leq \epsilon \log \#(O_K/P)$$

が成立する．さらに，必要なら N を大きくとって，任意の $n, m \geq N$ と $\sigma \in K(\mathbb{C})$ について，

$$\sup \left| \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\sigma,n}}{\|\cdot\|_{\sigma,m}} \right) \right| \leq \epsilon$$

も成立するとしてよい．$n, m \geq N$ となる n, m について，$\mathcal{Y}$ を $\mathcal{X}_n$ と $\mathcal{X}_m$ の結合とする．$\pi_n : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}_n$ と $\pi_m : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}_m$ を自然な射とする．s を $\pi_n^*(\mathcal{L}_n) \otimes \pi_m^*(\mathcal{L}_m^{-1})$ の有理切断で U 上で 1 となるものとする．このとき，各 $P \in S$，各 $\sigma \in K(\mathbb{C})$ に対して，

$$\sup |\log \|s\|_P| \leq \epsilon \log \#(O_K/P), \qquad \sup |\log \|s\|_\sigma| \leq \epsilon$$

である．このことから容易に，

$$\widehat{\deg} \left(\pi_n^*(\overline{\mathcal{L}}_n) \otimes \pi_m^*(\overline{\mathcal{L}}_m^{-1}) \Big|_{\Delta_x} \right)$$

を評価する際の P で関与の絶対値は $\epsilon \mathcal{Y}_P$ ($\mathcal{Y}_P$ は $\mathcal{Y}$ の P でのファイバー) と Δ_x との交点数 $\epsilon[K(x) : K] \log \#(O_K/P)$ で押さえられる．また，σ での関与の絶対値は $\epsilon[K(x) : K]$ で押さえられる．よって，

$$\left| \widehat{\deg} \left(\pi_n^*(\overline{\mathcal{L}}_n) \otimes \pi_m^*(\overline{\mathcal{L}}_m^{-1}) \Big|_{\Delta_x} \right) \right| \leq \epsilon[K(x) : K] \left([K : \mathbb{Q}] + \sum_{P \in S} \log \#(O_K/P) \right)$$

となり，これは，$B = [K : \mathbb{Q}] + \sum_{P \in S} \log \#(O_K/P)$ とおくと，

$$|h_{(\mathcal{X}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)}(x) - h_{(\mathcal{X}_m, \overline{\mathcal{L}}_m)}(x)| \leq \epsilon B$$

を示している．よって命題は示された． □

5.4. **ネフな C^∞-エルミート直線束の交点数．** ここでは，$\mathcal{X}$ を $d = \dim \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ である射影的な算術的多様体とする．まず，C^∞-エルミート直線束に関する概念を定義しておく．$\overline{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞ なエルミート $\mathbb{Q}$-直線束とする．繰り返しになるが，$\overline{\mathcal{L}}$ が**垂直的にネフ**であるとは，$\mathcal{L}$ が $X \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ について相対的にネフであり，$c_1(\overline{\mathcal{L}})$ が半正であるときにいう．また，$\overline{\mathcal{L}}$ が**水平的**にネフ であるとは，任意の $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ 上平坦な $\mathcal{X}$ の 1 次元部分スキーム C に対して，$\widehat{\deg} \left(\overline{\mathcal{L}}\big|_C \right) \geq 0$ となるときにいう．さらに，垂直的にネフかつ水平的にネフであるとき，$\overline{\mathcal{L}}$ が**ネフ** であると呼ぶことにする．このとき，次の定理が成立する．

定理 5.4.1. $\overline{\mathcal{L}}_1, \ldots, \overline{\mathcal{L}}_{d+1}$ を $\mathcal{X}$ 上のネフな C^∞-エルミート直線束とする．このとき，

$$\widehat{\deg} \left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_1) \cdots \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_{d+1}) \right) \geq 0.$$

証明： まず，次の特別の場合から始めよう．

補題 5.4.2. $\overline{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{X}$ 上のネフな C^∞-エルミート直線束であり，$\overline{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{X}$ 上の垂直的にネフな C^∞-エルミート直線束で次を満たしているとする．任意の $\mathbb{Z}$ 上平坦である $\mathcal{X}$ の整な部分スキーム Γ に対して，

$$\widehat{\deg} \left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}\big|_\Gamma)^{\dim(\Gamma_{\mathbb{Q}})+1} \right) > 0$$

である．このとき，任意の $0 \le i \le d+1$ に対して，

$$\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^i \cdot \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{d+1-i}\right) \ge 0$$

証明：　d に関する帰納法で証明する．$d=0$ のときは自明である．そこで，$d>0$ とする．まず，$0 \le i < d+1$ の場合を考える．このとき，$\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{d+1}\right) > 0$ であるので，$\overline{\mathcal{M}}$ を $\overline{\mathcal{M}}^{\otimes n}$ $(n>0)$ に置き換えると $\mathcal{M}$ に小さい切断 s があるとしてよい．つまり，$s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{M}) \setminus \{0\}$ で $\|s\|_{\sup} < 1$ となる切断である．$\operatorname{div}(s) = a_1\Gamma_1 + \cdots + a_e\Gamma_e$ をサイクルとしての分解とする．ここで，$a_j > 0$ である．このとき，

$$\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^i \cdot \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{d+1-i}\right) = \sum_j a_j \widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}\big|_{\Gamma_j})^i \cdot \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}\big|_{\Gamma_j})^{d-i}\right) - \int_{\mathcal{X}(\mathbb{C})} \log(\|s\|) c_1(\overline{\mathcal{L}})^i \cdot \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{d-i}$$

である．よって，帰納法の仮定により上は非負である．

次に $i = d+1$ の場合を考える．そこで，任意の有理数 t に対して，$\overline{\mathcal{L}}_t = \overline{\mathcal{L}} + t\overline{\mathcal{M}}$ とおき，$P(t) = \widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_t)^{d+1}\right)$ で定義される t に関する多項式について，次の主張を考える．

主張 5.4.2.1. もし $t>0$ で $P(t)>0$ なら，$P(t) \ge t^{d+1}\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{d+1}\right)$ である．

まず，帰納法の仮定と $P(t)>0$ であることから，$\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_t\big|_{\Gamma})^{\dim(\Gamma_{\mathbb{Q}})+1}\right) > 0$ がすべての $\mathbb{Z}$ 上平坦である $\mathcal{X}$ の整な部分スキーム Γ について成り立つ．したがって，前と同様の議論で $\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) \cdot \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_t)^d\right) \ge 0$ である．このとき，

$$\begin{aligned}
P(t) &= \widehat{\deg}\left((\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) + t\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}})) \cdot \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_t)^d\right) \\
&\ge t\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}) \cdot \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_t)^d\right) \\
&\ge t^{d+1}\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{d+1}\right)
\end{aligned}$$

である．よって主張は証明された．

補題の証明にもどる．ここで，$t_0 = \max\{t \in \mathbb{R} \mid P(t) = 0\}$ とおく．さて，$t_0 > 0$ と仮定する．このとき，前の主張により，任意の $t > t_0$ について

$$P(t) \ge t^{d+1}\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{e+1}\right)$$

である．よって，t を t_0 に近づけて，

$$0 = P(t_0) \ge t_0^{e+1}\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}})^{d+1}\right) > 0$$

となる．これは矛盾である．すなわち，$t_0 \le 0$ である．特に，$P(0) \ge 0$ となり補題は証明された．　□

さて，定理の証明に戻ろう．これも d に関する帰納法で証明する．$d=0$ の場合は自明である．そこで $d>0$ と仮定する．いま $\mathcal{X}$ 上に垂直的にネフな C^∞-エルミート直線束 $\overline{\mathcal{M}}$ で次を満たしているものを固定する．任意の $\mathbb{Z}$ 上平坦である $\mathcal{X}$ の整な部分スキーム Γ に対して，

$$\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}\big|_{\Gamma})^{\dim(\Gamma_{\mathbb{Q}})+1}\right) > 0$$

である．t を正の有理数とし，$\overline{\mathcal{L}}_{d+1}+t\overline{\mathcal{M}}$ を考える．このとき，前の補題より，

$$\widehat{\deg}\left((\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_{d+1})+t\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}))^{d+1}\right)>0$$

である．よって，十分大きな自然数 n をとると $n(\mathcal{L}+t\mathcal{M})$ は小さな切断 s を持つ．そこで，$\operatorname{div}(s)=a_1\Gamma_1+\cdots+a_e\Gamma_e$ をサイクルとしての分解とする．ここで，$a_j>0$ である．このとき，

$$n\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_1)\cdots\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_d)\cdot\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_{d+1}+t\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}))\right)=\sum_j a_i\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_1\big|_{\Gamma_j})\cdots\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_d\big|_{\Gamma_j})^{d-i}\right)$$
$$-\int_{\mathcal{X}(\mathbb{C})}\log(\|s\|)c_1(\overline{\mathcal{L}}_1)\cdots\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_d)$$

となる．よって，帰納法の仮定より，$\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_1)\cdots\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_d)\cdot\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_{d+1}+t\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}))\right)\geq 0$ である．ここで，t は任意の正の有理数であるので定理を得る． □

5.5. **算術的な高さ関数と交点数との関係.** ここでは，$\mathcal{X}$ を $d=\dim\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ である射影的な算術的多様体とする．

定理 5.5.1. $\overline{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束で，$\overline{\mathcal{L}}$ は垂直的にネフで，$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ は豊富であるとする．このとき，次の不等式が成り立つ．

$$\sup_{Y\subsetneq\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}}\left\{\inf_{x\in(\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}\setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}})}h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(x)\right\}\geq\frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})}{(d+1)\deg(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^d)}\geq\inf_{x\in\mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}})}h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(x)$$

証明： まず，次の補題から始める．

補題 5.5.2. もし $\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})>0$ であるなら，

$$\sup_{Y\subsetneq\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}}\left\{\inf_{x\in(\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}\setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}})}h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(x)\right\}\geq 0$$

である．

証明： 仮定より，$\overline{\mathcal{L}}$ を $\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}$ $(n>0)$ に置き換えると $\mathcal{L}$ に小さい切断 s があるとしてよい．$Y=\operatorname{div}(s)$ とおく．このとき，任意の $x\in(\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}\setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して，

$$h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(x)=\frac{1}{\deg(\Delta_x\to B)}\widehat{\deg}\left(\widehat{\operatorname{div}(s)}\Big|_{\Delta_x}\right)$$

である．ここで，$\widehat{\operatorname{div}(s)}\Big|_{\Delta_x}$ はアルキメデス的な点もこめて正のサイクルである．よって，$h_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(x)\geq 0$ である． □

それでは定理の証明を始めよう．c を $0<c<1$ を満たす実数とし，$\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ 上のエルミート直線束 $\overline{A}$ を $\overline{A}=(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})},c|\cdot|)$ で定める．まず，左の不等式から考える．λ を

$$\lambda<\frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})}{(d+1)\deg(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^d)\widehat{\deg}(\overline{A})}$$

を満たす任意の有理数とする．このとき，簡単な計算で

$$\widehat{\deg}\left((\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) - \lambda\widehat{c}_1(\pi^*(\overline{A})))^{d+1}\right) > 0$$

であることがわかる．ここで，$\pi : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ は自然な射である．よって，$\overline{\mathcal{L}} - \lambda\pi^*(\overline{A})$ が垂直的にネフであり $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ 上豊富であることに注意すると，前の補題により，

$$\sup_{Y \subsetneq \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}} \left\{ \inf_{x \in (\mathcal{X}_{\mathbb{Q}} \setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}})} h_{(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}} - \lambda\pi^*(\overline{A}))}(x) \right\} \geq 0$$

であることがわかる．これより，

$$\sup_{Y \subsetneq \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}} \left\{ \inf_{x \in (\mathcal{X}_{\mathbb{Q}} \setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}})} h_{(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})}(x) \right\} \geq \lambda\widehat{\deg}(\overline{A})$$

である．これから，定理の左の不等式が従う．

次に，右側の不等式を考えよう．さて，μ を

$$\mu \leq \frac{\inf_{x \in \mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}})} h_{(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})}(x)}{\widehat{\deg}(\overline{A})}$$

を満たす任意の有理数とする．このとき，

$$\inf_{x \in \mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}})} h_{(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}} - \mu\pi^*(\overline{A}))}(x) \geq 0$$

となり，これは $\overline{\mathcal{L}} - \mu\pi^*(\overline{A})$ が水平的にネフであることを示しており，結果としてネフになる．よって，定理 5.4.1 によれば，

$$\widehat{\deg}\left((\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) - \mu\widehat{c}_1(\pi^*(\overline{A})))^{d+1}\right) \geq 0$$

となる．つまり，

$$\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}\right) \geq \mu(d+1)\deg(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^d)\widehat{\deg}(\overline{A})$$

である．よって，右の不等式を得る． □

系 5.5.3. X を $\mathbb{Q}$ 上で定義された射影的な代数多様体とし，L を X 上の豊富な直線束とする．$\overline{L}$ を L に垂直的にネフであるアデール計量をいれたものとする．このとき，

$$\sup_{Y \subsetneq X} \left\{ \inf_{x \in (X \setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}})} h_{(X, \overline{L})}(x) \right\} \geq \frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1})}{(d+1)\deg(L^d)} \geq \inf_{x \in X(\overline{\mathbb{Q}})} h_{(X, \overline{L})}(x)$$

である．

証明： $\overline{L}$ を実現するための C^∞-モデルの列を $(\mathcal{X}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)$ とする．ここで，$\overline{L}$ の計量は垂直的にネフであるので，$\overline{\mathcal{L}}_n$ は $\mathcal{X}_n$ 上垂直的にネフになるようにとれる．よって，前の定理により，

$$\sup_{Y \subsetneq X} \left\{ \inf_{x \in (X \setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}})} h_{(\mathcal{X}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)}(x) \right\} \geq \frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_n)^{d+1})}{(d+1)\deg(L^d)} \geq \inf_{x \in X(\overline{\mathbb{Q}})} h_{(\mathcal{X}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)}(x)$$

が成り立つ．ここで，

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_n)^{d+1}) = \widehat{\deg}(\overline{L}^{d+1}) \quad \text{と} \quad \lim_{n \to \infty} h_{(\mathcal{X}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)}(x) = h_{(X, \overline{L})}(x)$$

が成り立つ．右についてはさらに強くその収束は一様である．つまり，任意の正の数 ϵ について，ある n が存在して

$$\left| h_{(\mathcal{X}_n,\overline{\mathcal{L}}_n)}(x) - h_{(X,\overline{L})}(x) \right| \leq \epsilon$$

が任意の $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ について成立する．これを用いると，

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{x\in X(\overline{\mathbb{Q}})} h_{(\mathcal{X}_n,\overline{\mathcal{L}}_n)}(x) = \inf_{x\in X(\overline{\mathbb{Q}})} h_{(X,\overline{L})}(x)$$

と

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{Y\subsetneq X} \left\{ \inf_{x\in(X\setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}})} h_{(\mathcal{X}_n,\overline{\mathcal{L}}_n)}(x) \right\} \right) = \sup_{Y\subsetneq X} \left\{ \inf_{x\in(X\setminus Y)(\overline{\mathbb{Q}})} h_{(X,\overline{L})}(x) \right\}$$

がわかる．よって，系を得る． □

6. ボゴモロフ予想

6.1. **同程度分布の定理.** K を代数体とし，X を K 上定義された幾何学的に既約な射影代数多様体とする．ここで，埋め込み $\sigma : K \to \mathbb{C}$ を固定し，$\overline{K}$ を上の埋め込みの意味で，$\mathbb{C}$ 内での K の閉包とする．埋め込み $\sigma : K \to \mathbb{C}$ を用いて $X_\sigma = X \otimes_K \mathbb{C}$ とおく．このとき，自然な埋め込み $\iota_\sigma : X(\overline{K}) \hookrightarrow X_\sigma$ が定まる．正確には，ι_σ は $X(\overline{K})$ から $X_\sigma \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ の切断全体への写像である．$x \in A(\overline{K})$ に対して，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-作用の $X(\overline{K})$ 内の軌道の ι_σ の像を $O_\sigma(x)$ と書くことにする．

$\{x_m\}_{m=1}^\infty$ を $X(\overline{K})$ の列とする．このとき，もし $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ の任意の部分列が X の中でザリスキ位相の意味で稠密であるとき，$\{x_m\}_{m=1}^\infty$ は**生成的**（*generic*）であると呼ぶことにする．

さて，L を X 上の豊富な直線束で，$\|\cdot\|$ を L のアデール計量とし，$\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ は垂直的にネフであるとする．つまり，$\overline{L}$ は，垂直的にネフなモデルの列 $\{(\mathcal{X}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)\}_{n=1}^\infty$ で近似されているとする．このとき，次の定理が成立する．

定理 6.1.1 (cf. [28], [29], [32]). $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ を $X(\overline{K})$ の生成的な列とする．ここで，次の二つを仮定する．

(1) $c_1(\overline{L}_\sigma)$ は X_σ 上で正な C^∞-形式である.（‘ 正 ’ の定義は §§3.3 を参照.）
(2) $h_{(X,\overline{L})}(x) \geq 0$ がすべての $x \in X(\overline{K})$ について成り立つ.
(3) $\lim_{m\to\infty} h_{(X,\overline{L})}(x_m) = 0$.

このとき，X_σ 上のカレントとしての弱収束

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{\#O_\sigma(x_m)}\sum_{z\in O_\sigma(x_m)}\delta_z\right) = \frac{c_1(\overline{L}_\sigma)^{\dim X}}{\deg(L^{\dim X})}$$

を得る．つまり，任意の X_σ 上の C^∞-関数 f に対して，

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{\#O_\sigma(x_m)}\sum_{z\in O_\sigma(x_m)}f(z)\right) = \int_{X_\sigma}\frac{f c_1(\overline{L}_\sigma)^{\dim X}}{\deg(L^{\dim X})}$$

が成り立つ.

証明： f を X_σ の C^∞-関数とする．明らかに，f は実数値関数としてよい．実数 λ に対して，$\overline{L}_\lambda$ を次のようにして距離をつけなおしたものとする．X_σ 上では $\exp(-\lambda f)\|\cdot\|$ であり，他の $X(\mathbb{C})$ の連結成分上では $\|\cdot\|$ のままとする．このとき，$c_1(\overline{L}_\sigma)$ が正で，X_σ がコンパクトであるので，ある正の数 λ_0 が存在して，すべての $|\lambda| \leq \lambda_0$ となる λ について，$\overline{L}_\lambda$ は垂直的にネフである．よって，前節の系 5.5.3 より，

$$\sup_{Y\subsetneq X}\left\{\inf_{x\in(X\setminus Y)(\overline{K})} h_{(X,\overline{L}_\lambda)}(x)\right\} \geq \frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{L}_\lambda)^{d+1})}{(d+1)\deg(L^d)} \geq \inf_{x\in X(\overline{K})} h_{(X,\overline{L}_\lambda)}(x)$$

である．ここで，$d = \dim X$ である．$\lambda = 0$ の場合に，生成的な列 $\{x_m\}$ を上に代入すると，まず $\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}) = 0$ を得る．さらに，簡単な計算で，

$$h_{(X,\overline{L}_\lambda)}(x) = h_{(X,\overline{L})}(x) + \frac{\lambda}{\#O_\sigma(x)}\sum_{z\in O_\sigma(x)}f(z)$$

であり，

$$\frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{L}_\lambda)^{d+1})}{(d+1)\deg(L^d)} = \frac{\lambda}{\deg(L^d)}\int_{X_\sigma} fc_1(\overline{L}_\sigma)^d + O(\lambda^2)$$

であることがわかる．したがって，$\{x_m\}$ が生成的であり，$\lim_{m\to\infty} h_{(X,\overline{L})}(x_m) = 0$ であることに注意すると，

$$\lambda \liminf_m \left(\frac{1}{\#O_\sigma(x_m)} \sum_{z \in O_\sigma(x_m)} f(z) \right) \geq \frac{\lambda}{\deg(L^d)} \int_{X_\sigma} fc_1(\overline{L}_\sigma)^d + O(\lambda^2)$$

であることがわかる. よって，$\lambda \to 0$ として，

$$\liminf_m \left(\frac{1}{\#O_\sigma(x_m)} \sum_{z \in O_\sigma(x_m)} f(z) \right) \geq \frac{1}{\deg(L^d)} \int_{X_\sigma} fc_1(\overline{L}_\sigma)^d$$

を得る．この不等式は f を $-f$ に置き換えても成り立つので

$$\limsup_m \left(\frac{1}{\#O_\sigma(x_m)} \sum_{z \in O_\sigma(x_m)} f(z) \right) \leq \frac{1}{\deg(L^d)} \int_{X_\sigma} fc_1(\overline{L}_\sigma)^d$$

も得る．よって，定理は証明できた． □

6.2. **ボゴモロフ予想の証明.** K を代数体，A を K 上のアーベル多様体とする．L を A 上の対称的で豊富な直線束とする．さらに，X を $A_{\overline{K}}$ の部分代数多様体とする．このとき，ボゴモロフ予想とは，次の定理をいう.

定理 6.2.1. $\hat{h}_L$ を L から決まるネロン・テートの高さ関数とする．任意の正の数 $\epsilon > 0$ に対して，集合 $\{x \in X(\overline{K}) \mid \hat{h}_L(x) \leq \epsilon\}$ が X の中でザリスキ位相の意味で稠密であるとする．このとき，A 部分アーベル多様体 B と $A(\overline{K})$ のねじれ点 b が存在して，$X = B + b$ と書ける.

証明を始める前にいろいろな準備が必要である．A_K の代数的な部分群 $G(X)$ を $G(X) = \{a \in A(\overline{K}) \mid a + X = X\}$ とおく．まず，次の補題から始めよう.

補題 6.2.2. 2 以上の自然数 m に対して，$\alpha_m : A_K^m \to A_K^{m-1}$ を

$$\alpha_m(x_1, \ldots, x_m) = (x_1 - x_2, \ldots, x_{m-1} - x_m)$$

で定める．もし $G(X) = \{0\}$ なら，m が十分大きいとき，$\alpha_m|_{X^m} : X^m \to \alpha_m(X^m)$ は双有理的になる.

証明： $x_1, \ldots, x_m \in X$ に対して，A の代数的部分群 $G(x_1, \ldots, x_m)$ を

$$G(x_1, \ldots, x_m) = \{a \in A_K \mid a + x_1, \ldots, a + x_m \in X\}$$

と定める．ここで，$G(X) = \{a \in A_K \mid a + x \in X \text{ for all } x \in X\}$ に注意すれば，ある m_0 と $x_1, \ldots, x_{m_0} \in X$ が存在して，$G(x_1, \ldots, x_{m_0}) = \{0\}$ なる．よって，次の主張を証明すれば十分である.

主張 6.2.2.1. $x_1, \dots, x_m \in X$ に対して，

$$(\alpha_m|_{X^m})^{-1}(\alpha_m(x_1, \dots, x_m)) = \{(x_1 + a, \dots, x_m + a) \mid a \in G(x_1, \dots, x_m)\}$$

である．

$(y_1, \dots, y_m) \in (\alpha_m|_{X^m})^{-1}(\alpha_m(x_1, \dots, x_m))$ とする．このとき，$x_i - x_{i+1} = y_i - y_{i+1}$ がすべての $1 \le i < m$ で成り立つ．よって，$y_1 - x_1 = \cdots = y_m - x_m$ であるのでこれを a とおくと，$y_i = x_i + a$ で $a \in G(x_1, \dots, x_m)$ である．逆の包含関係は自明である． □

定理の証明を始めよう．まず，$G(X) = \{0\}$ の場合を考えよう．この場合，$\dim X = 0$ を示せば十分である．というのは，$X = \{x\}$ とおくと，仮定より，$0 \le \hat{h}_L(x) \le \epsilon$ が任意の正の数 ϵ について成立する．つまり，$\hat{h}_L(x) = 0$ である．よって，$x \in A(\overline{K})_{tor}$ である．これは，定理の主張を示している．

さて，$G(X) = \{0\}$ の仮定下で，$\dim X = 0$ を示すことを考えよう．そこで，$\dim X > 0$ と仮定する．$G(X) = \{0\}$ であるので，前の補題より，十分大きな m をとれば，$\alpha_m|_{X^m} : X^m \to \alpha_m(X^m)$ は双有理的になる．記号の乱用で，今後，$\alpha_m|_{X^m}$ を α_m と表すことにする．定理を証明するために K を K の有限次拡大体に置き換えてもよいので，X は K 上定義されており，$X^m \to \alpha_m(X^m)$ は K 上双有理的であるとしてよい．$[2] : A \to A$ に関する L の許容計量を $\|\cdot\|$ とおく．このとき，$\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ は垂直的にネフであり，$c_1(\overline{L})$ は正な C^∞-形式である．さらに，$h_{(A,\overline{L})} = \hat{h}_L$ である．$p_i : A^m \to A$ を i-番目への射影とし，$\overline{L}_m = p_1^*(\overline{L}) \otimes \cdots \otimes p_m^*(\overline{L})$ とおく．$\overline{L}_m$ の計量は $[2] : A^m \to A^m$ に関する $p_1^*(L) \otimes \cdots \otimes p_m^*(L)$ の許容計量である．ここで，簡単にわかることだが，次が成立することを注意しておく．

(1) $c_1(\overline{L}_m) = p_1^*(c_1(\overline{L})) + \cdots + p_m^*(c_1(\overline{L}))$ である．
(2) $h_{(A^m, \overline{L}_m)}(a_1, \dots, a_m) = \hat{h}_L(a_1) + \cdots + \hat{h}_L(a_m)$ である．

A^{m-1} 上で $\overline{L}_{m-1}$ も同様に定める．

X の $\overline{K}$ 上の部分多様体全体は可算個であるので，$\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ で X の $\overline{K}$ 上の真の部分多様体全体を表すことにする．このとき，仮定から，任意の n について $x_n \notin \bigcup_{i=1}^n Y_i$ かつ $\hat{h}_L(x_n) \le 1/n$ となる $x_n \in X(\overline{K})$ が見つかる．そうしてできた点列 $\{x_n\}$ は生成的で $\lim_{n\to\infty} \hat{h}_L(x_n) = 0$ である．いま，$\mathbb{N}$ で自然数全体を表し，全単射 $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^m$ を固定する．$\beta(n)$ の i-番目の成分を $\beta_i(n)$ で表すことにして，$x(n) = (x_{\beta_1(n)}, \dots, x_{\beta_m(n)})$ とおく．こうして，X^m の点列 $\{x(n)\}$ が作れた．これについて，容易に，$\lim_{n\to\infty} h_{(X^m, \overline{L}_m)}(x(n)) = 0$ であることわかる．さらに，$\{x(n)\}$ は X^m のなかでザリスキ位相で稠密であることもわかる．というのは，

$$\{x(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{(x_{e_1}, \dots, x_{e_m}) \mid (e_1, \dots, e_m) \in \mathbb{N}^m\}$$

であることに注意して，$\{(x_{e_1}, \dots, x_{e_m}) \mid (e_1, \dots, e_m) \in \mathbb{N}^m\}$ が X^m で稠密であることを m に関する帰納法で示せばよい．そこで，$\{Z_i\}_{i=1}^\infty$ を X^m の真の部分多様体全体を表すことにして，$x(n_i) \notin \bigcup_{j=1}^i Z_j$ となるように，$\{x(n)\}$ の部分列 $\{x(n_i)\}$ を選べば，これは，生成的で，$\lim_{i\to\infty} h_{(X^m, \overline{L}_m)}(x(n_i)) = 0$ となる．さて，$\alpha_m : X^m \to \alpha_m(X^m)$ は K 上双有理的であるので，ある $\alpha_m(X^m)$ の K 上のザリスキ開集合 U が存在して，$\alpha_m : \alpha_m^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ となる．部分列 $\{x(n_i)\}$ を必要なら取り直して，$x(n_i) \in \alpha_m^{-1}(U)$ としてよい．さて，ここで，$\{\alpha_m(x(n_i))\}$ を考える．これは，明らかに $\alpha_m(X^m)$ 上生成的である．さらに，$\sqrt{\hat{h}_L}$ が $A(\overline{K})$ 上のノルムを与えていることに注意すると，$\lim_{i\to\infty} h_{(A^{m-1}, \overline{L}_{m-1})}(\alpha_m(x(n_i))) = 0$ であることが容易にわかる．よって，$\sigma : K \to \mathbb{C}$ を一つ固定すると，定理 6.1.1 より，$d = \dim X^m = \dim \alpha_m(X^m)$

とおけば，X_σ^m 上で

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{\#O_\sigma(x(n_i))}\sum_{z\in O_\sigma(x(n_i))}\delta_z\right)=\frac{\left(c_1(\overline{L}_{m\sigma})\big|_{X_\sigma^m}\right)^{\wedge d}}{\deg\left((L_m|_{X^m})^d\right)}$$

$\alpha_m(X^m)_\sigma$ 上で

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{\#O_\sigma(\alpha_m(x(n_i)))}\sum_{z\in O_\sigma(\alpha_m(x(n_i)))}\delta_z\right)=\frac{\left(c_1(\overline{L}_{m-1\sigma})\big|_{\alpha_m(X^m)_\sigma}\right)^{\wedge d}}{\deg\left(\left(L_{m-1}|_{\alpha_m(X^m)}\right)^d\right)}$$

が成り立つ．したがって，それぞれの収束は，$\alpha_m^{-1}(U)_\sigma$ 上と U_σ でも成立する．ここで $\alpha_m^{-1}(U)_\sigma\simeq U_\sigma$ であるので，

$$\frac{\left(c_1(\overline{L}_{m\sigma})\big|_{X_\sigma^m}\right)^{\wedge d}}{\deg\left((L_m|_{X^m})^d\right)}=\alpha_m^*\left(\frac{\left(c_1(\overline{L}_{m-1\sigma})\big|_{\alpha_m(X^m)_\sigma}\right)^{\wedge d}}{\deg\left(\left(L_{m-1}|_{\alpha_m(X^m)}\right)^d\right)}\right)$$

が $\alpha_m^{-1}(U)_\sigma$ 上で成立する．ところが，両辺とも C^∞-形式であるので，この等式は X_σ^m 上でも正しい．一方，$\alpha_m: X^m\to\alpha_m(X^m)$ は α_m の作り方より，その対角成分 $\{(x,\dots,x)\mid x\in X\}$ 上では同型でない．つまり，右辺の形式は対角成分上で正でない．これは，矛盾である．なぜなら，左辺の形式は対角成分上で正であるからである．

最後に，一般的な場合を考えよう．$A'=A/G(X)$ とおき，$\pi: A\to A/G(X)$ を自然な射とする．さらに，$X'=\pi(X)$ とおく．このとき，$G(X')=\{0\}$ であり，$\pi^{-1}(X')=X$ となることが容易にわかる．L' を A' 上の対称的で豊富な直線束とする．ここで，$L^{\otimes a}\otimes\pi^*(L^{\otimes -1})$ が豊富となる自然数 a をとると，$\pi^*(\hat{h}_{L'})\le a\hat{h}_L$ である．よって，任意の正の数 ϵ に対して，$\{x'\in X'(\overline{K})\mid \hat{h}_{L'}(x')\le\epsilon\}$ はザリスキ位相で稠密である．というのは，

$$\{x\in X(\overline{K})\mid \hat{h}_L(x)\le\epsilon/a\}\subseteq\pi^{-1}\left(\{x'\in X'(\overline{K})\mid \hat{h}_{L'}(x')\le\epsilon\}\right)$$

であるからである．したがって，前の場合より，ある $x'\in A'(\overline{K})_{tor}$ が存在して $X'=\{x'\}$ となる．よって，$X=\pi^{-1}(x')$ である．これから，定理の結論を容易に示せる．

付録

ここでは，本文中に証明を与えることができなかったいくつかの補題の証明を与えておく．

補題 A.1. X を d 次元複素多様体，$\alpha \in A^{p,q}(X)$，$\beta \in A^{d-(p+1),q-(p+1)}(X)$ とすれば，

$$d\alpha \wedge d^c\beta = -d^c\alpha \wedge d\beta$$

が成り立つ．

証明： $d = \partial + \overline{\partial}$，$d^c = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \overline{\partial})$ を代入して，X が d 次元であるから $\partial\alpha \wedge \partial\beta = 0$，$\overline{\partial}\alpha \wedge \overline{\partial}\beta = 0$ に注意すればよい． □

補題 A.2. $\mathbb{C}^d$ の標準的な座標を $z_1, \ldots, z_d$ とする．コンパクトな台をもつ任意の $\eta \in A^{d-1,d-1}(\mathbb{C}^d)$ に対して，

(i) $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{|z_1|=\epsilon} \log|z_1|^2 \, d^c\eta = 0$

(ii) $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{|z_1|=\epsilon} d^c \log|z_1|^2 \wedge \eta = \int_{z_1=0} \eta$

である．

証明： (i) $d^c\eta$ は $2d-1$-形式だから，各項には dz_1 か $d\bar{z}_1$ が入っている．$z_1 = \epsilon e^{\sqrt{-1}\theta}$ とおくと，

$$\log|z_1|^2 \, d^c\eta = \epsilon \log \epsilon^2 \, \omega$$

と書け，ω の係数は $\epsilon \downarrow 0$ のとき発散しない．このことから (i) が従う．

(ii)

$$d^c \log|z_1|^2 = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \overline{\partial}) \log|z_1|^2 = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{dz_1}{z_1} - \frac{d\bar{z}_1}{\bar{z}_1} \right)$$

である．$z_1 = \epsilon e^{\sqrt{-1}\theta}$ とおけば，

$$\int_{|z_1|=\epsilon} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \eta = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{C}^{d-1}} \sqrt{-1} d\theta \wedge (\eta|_{z_1=\epsilon e^{\sqrt{-1}\theta}}) \xrightarrow{\epsilon\downarrow 0} 2\pi\sqrt{-1} \int_{z_1=0} \eta$$

$$\int_{|z_1|=\epsilon} \frac{d\bar{z}_1}{\bar{z}_1} \wedge \eta = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{C}^{d-1}} -\sqrt{-1} d\theta \wedge (\eta|_{z_1=\epsilon e^{\sqrt{-1}\theta}}) \xrightarrow{\epsilon\downarrow 0} -2\pi\sqrt{-1} \int_{z_1=0} \eta$$

であるから

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{|z_1|=\epsilon} d^c \log|z_1|^2 \wedge \eta = \int_{z_1=0} \eta$$

となる． □

参考文献

[1] A. Abbes and T. Bouche, Théorème de Hilbert-Samuel “arithmétique”, Ann. Inst. Fourier(Grenoble) **45** (1995), 375–401

[2] S. Ju. Arakelov, An intersection theory for divisors on an arithmetic surface, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **38** (1974), 1179–1192 AMS Translation 8, (1974), 1167–1180

[3] J.-M. Bismut, H. Gillet and C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott-Chern forms and analytic torsion, Comm. Math. Phys. **115** (1988), 49–78

[4] J.-M. Bismut and É. Vasserot, The asymptotics of the Ray-Singer analytic torsion associated with high powers of a positive line bundle, Comm. Math. Phys. **125** (1989), 355–367

[5] G. Faltings, Calculus on arithmetic surfaces, Ann. of Math. (2) **119** (1984), 387–424

[6] G. Faltings, *Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem*, Notes taken by Shouwu Zhang. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1992

[7] H. Gillet and C. Soulé, Un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **309** (1989), 929–932

[8] H. Gillet and C. Soulé, Arithmetic intersection theory, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No.72 (1990), 93–174 (1991)

[9] H. Gillet and C. Soulé, Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric. I, II, Ann. of Math. (2) 131 (1990), 163–203; ibid (2) **131** (1990), 205–238

[10] H. Gillet and C. Soulé, An arithmetic Riemann-Roch theorem, Invent. Math. **110** (1992), 473–543

[11] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics. Wiley-Intersci., New York, 1978

[12] P. M. Gruber and C. G. Lekkerkerker, *Geometry of numbers*, Second edition, North-Holland, Amsterdam, 1987

[13] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer, New York, 1977

[14] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II, Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203; ibid. (2) **79** (1964), 205–326

[15] S. Kawaguchi and A. Moriwaki, Inequalities for semistable families for arithmetic varieties, alg-geom/9710007.

[16] S. L. Kleiman, Toward a numerical theory of ampleness, Ann. of Math. (2) **84** (1966), 293–344

[17] F. F. Knudsen and D. Mumford, The projectivity of the moduli space of stable curves. I. Preliminaries on “det” and “Div”, Math. Scand. **39** (1976), 19–55.

[18] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer, New York, 1983

[19] L. Moret-Bailly, Métriques permises, Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: La Conjecture de Mordell, Astérisque 127 (1985), 29-87.

[20] A. Moriwaki, Inequality of Bogomolov-Gieseker type on arithmetic surfaces, Duke Math. J. **74** (1994), 713–761

[21] A. Moriwaki, Arithmetic height functions over finitely generated fields, math.NT/9809016.

[22] D. B. Ray and I. M. Singer, Analytic torsion for complex manifolds, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 154–177

[23] M. Raynaud, Courbes sur une variété abélienne et points de torsion, Invent. Math. **71** (1983), 207–233

[24] M. Raynaud, Sous-variétés d’une variété abélienne et points de torsion, in *Arithmetic and geometry, Vol. I*, 327–352, Progr. Math., 35, Birkhäuser, Boston, Boston, Mass., 1983

[25] J.-P. Serre, Lectures on the Mordell-Weil Theorem, (2nd edition) Vieweg (1990).

[26] C. Soulé, *Lectures on Arakelov geometry*, With the collaboration of D. Abramovich, J.-F. Burnol and J. Kramer. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992

[27] L. Szpiro, Algebraic geometry over $\overline{\mathbf{Q}}$, in *Representation theory and algebraic geometry (Waltham, MA, 1995)*, 117–123, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997

[28] L. Szpiro, E. Ullmo and S. Zhang, Équirépartition des petits points, Invent. Math. **127** (1997), 337–347

[29] E. Ullmo, Positivité et discrétion des points algébriques des courbes, Ann. of Math. (2) **147** (1998), 167–179

[30] S. Zhang, Positive line bundles on arithmetic varieties, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 187–221

[31] S. Zhang, Small points and adelic metrics, J. Algebraic Geom. **4** (1995), 281–300

[32] S. Zhang, Equidistribution of small points on abelian varieties, Ann. of Math. (2) **147** (1998), 159–165

索引

まだ，新しい分野なので，訳語が固定されていないと思われるため，ここで，このノートで用いた訳語をまとめておく．

訳語表

adelic metric $\Longrightarrow$ アデール計量
admissible metric $\Longrightarrow$ 許容計量
ample $\Longrightarrow$ 豊富
analytic torsion $\Longrightarrow$ 解析的ねじれ
arithmetic Chow group $\Longrightarrow$ 算術的 Chow 群
arithmetic variety $\Longrightarrow$ 算術的多様体
cubic metric $\Longrightarrow$ 立方計量
determinant bundle $\Longrightarrow$ 行列式束
effective divisor $\Longrightarrow$ 有効因子
equidistribution $\Longrightarrow$ 同程度分布
generic $\Longrightarrow$ 生成的
generic resolution of singularities $\Longrightarrow$ 生成的特異点解消
height function $\Longrightarrow$ 高さ関数
integral $\Longrightarrow$ 整な
nef $\Longrightarrow$ ネフ
push-forward $\Longrightarrow$ 押し出し
quasi-projective $\Longrightarrow$ 擬射影的
regular $\Longrightarrow$ 正則
semipositive $\Longrightarrow$ 半正
symmetric $\Longrightarrow$ 対称的

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto, 606-01, Japan
E-mail address, 川口　周: kawaguch@kusm.kyoto-u.ac.jp
E-mail address, 森脇　淳: moriwaki@kusm.kyoto-u.ac.jp
E-mail address, 山木　壱彦: yamaki@kusm.kyoto-u.ac.jp