Simple supercuspidal L-packets of quasi-split classical groups

大井雅雄

東京大学大学院数理科学研究科

March 18, 2018

局所 Langlands 対応

- F : p 進体
- G : F 上の「準分裂古典群」

G の局所 Langlands 対応

$G(F)$ の既約スムーズ表現たちは,「L パラメータ」によって, 有限集合たちに自然に分割される:

$$\{G(F) \text{ の既約スムーズ表現}\}/\sim \; = \bigsqcup_{\phi:\, L \text{ パラメータ}} \Pi_\phi^G$$

- L パラメータ $\fallingdotseq$ F の Galois 表現（G に依る条件付）

問題意識

問題意識

局所 Langlands 対応を明示的に理解したい.

- π : $G(F)$ の既約スムーズ表現

記述したい：

(1) π を含む Π_{ϕ}^{G} はどんな有限集合か？
(2) ϕ はどんな Galois 表現か？

主結果

- $p \neq 2$ を仮定.

Theorem (主結果)

π を準分裂古典群 $G(F)$ の「単純超尖点表現」とする.

(1) π を含む有限集合 Π_ϕ^G は全て「単純超尖点表現」から成り，位数は以下の通りとなる.

(2) 対応する L パラメータ ϕ は *Galois* 表現として具体的に決定できる.

G	GL_N	SO_{2n+1}	Sp_{2n}	SO_{2n}	U_N (ur)
$\lvert\Pi_\phi^G\rvert$	1	1	2	$\begin{cases} 2 & (ur) \\ 1 & (ram) \end{cases}$	*1*

単純超尖点表現とは？

- 単純超尖点表現は，表現の「**深さ**」と呼ばれる不変量を用いて定義される．
- 表現の「深さ」は「**Bruhat–Tits–Moy–Prasad 理論**」を用いて定義される．
- **Bruhat–Tits–Moy–Prasad 理論**：$G(F)$ の開コンパクト部分群たちを「形」と「深さ」のデータで統一的に記述．

単純超尖点表現とは？

- $\mathrm{GL}_2(F)$ の例：

深さ \ 形	超スペシャル	岩堀
0	$\begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{O}^\times & \mathcal{O} \\ \mathfrak{p} & \mathcal{O}^\times \end{pmatrix}$
$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathcal{O} \\ \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}^2 & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix}$
$\frac{3}{2}$	$\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^2 & \mathfrak{p}^2 \\ \mathfrak{p}^2 & 1+\mathfrak{p}^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^2 & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}^2 & 1+\mathfrak{p}^2 \end{pmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

単純超尖点表現とは？

- π : $G(F)$ の既約スムーズ表現

Definition (表現の深さ)

$$\mathrm{depth}(\pi) := \inf_{K\,:\,\text{開コンパクト}} \{\mathrm{depth}(K) \mid \pi^K \neq 0\}$$

- $\mathrm{depth}(\pi)$ は 0 以上の有理数となる.
- 正ならば，取りうる最小値が存在.
  $\rightsquigarrow$ 最小値をとる表現を**単純超尖点表現**という.

証明等についてのコメント

- GL_N の場合：Bushnell–Henniart + Imai–Tsushima.
- 古典群の場合：エンドスコピー指標関係式（局所 Langlands 対応の自然性）によって GL_N の場合に帰着させる.
- 単純超尖点表現の指標を指標公式で計算する.
- 局所 Langlands 対応は，エンドスコピー指標関係式以外にも様々な自然性を満たす.

  $\rightsquigarrow$ 指標の計算と組み合わせて，Π_ϕ^G の構造や対応する Galois 表現 ϕ の候補を絞り込んでゆく.

局所 Langlands 対応と深さ

- 表現の深さは，局所 Langlands 対応によって，Galois 表現の分岐の深さと対応すると期待されている（depth-preserving）．
- 主定理の帰結：単純超尖点表現については depth-preserving が成立（暴分岐する Galois 表現の中で，最も分岐が浅いものと対応）．
- より分岐の深い表現ではどうなるか？