確率微分方程式の数値解析 II: 漸近展開と弱近似

山田 俊皓 (一橋大学大学院経済学研究科)

本講演の目的は, 確率微分方程式の解の密度関数や分布関数の漸近展開を基とする高次弱近似 (離散化法) の方法を紹介することである. また, path-dependent functional の漸近展開や弱近似など最近の発展についても言及する.

確率微分方程式の弱近似とは粗く言えば確率微分方程式の解の期待値の離散近似法のことである (詳細は篠崎裕司氏のアブストラクトを参照のこと). 通常弱近似を構成するには短時間の確率テイラー展開の期待値を一定次数まで一致させるように作用素を作り, その作用素を時間分割上で合成するが, 確率微分方程式の解の密度関数や分布関数の small time asymptotic expansion や small noise asymptotic expansion を基に作用素を構成して, 時間分割上でその作用素を合成して弱近似を得ることもできる. パラメータ ε を持つウィーナー汎関数 F^ε がマリアバン解析の意味で漸近展開 $F^\varepsilon = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots$ を持ち, 非退化条件を満たすとき, 密度関数 (デルタ関数との合成 (ウィーナー超汎関数) の期待値 (一般化期待値)) が渡辺の漸近展開 $p^{F^\varepsilon}(y) = E[\delta_y(F^\varepsilon)] = E[\delta_y(f_0)] + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \cdots$ を持つことはよく知られているが, 講演ではこの展開を基に確率微分方程式の弱近似を構成する方法について紹介する. この方法のメリットは, 多次元レヴィ面積やより一般の多次元ブラウン運動の反復積分など具体的な同時確率分布を閉形式で得ることが困難な対象を含む期待値をマリアバン解析によって全てブラウン運動の多項式で表現できること, 具体的な任意のオーダーの高次弱近似が自動的に得られること, などが挙げられる. すなわち, 適当な非退化条件を満たす確率微分方程式の解 X_t^x (x を出発する解の時刻 t の確率変数) の期待値を $P_t f(x) = E[f(X_t^x)]$ (f は有界可測関数) とするとき, ターゲットとする弱近似の次数 m に応じて, 上記の漸近展開を用いた近似作用素 Q_t をブラウン運動の多項式のみにより構成し, 時間 $T > 0$ に対して弱近似 $(Q_{T/n})^n f$ を得ると, その誤差は $\|P_T f - (Q_{T/n})^n f\|_\infty \le C\|f\|_\infty n^{-m}$ と評価できる. 問題は弱近似を目的とする場合, 漸近展開の適切な打ち切り方は何か, ということであるが, 弱近似がそもそも数値計算を対象とするものであるので, 計算コストの観点からは漸近展開の次数を単純に上げればよいというものではない. しかし, この点もマリアバン解析が解決してくれる. すなわち, マリアバンの部分積分を “逆向き”に利用することで, ある意味での弱近似に特化した最適な漸近展開の打ち切り方が得られる. この辺の事情や具体的な方法について講演で言及する予定である.

最近の話題として, フラクショナルブラウン運動で駆動するラフ微分方程式の解の密度関数の漸近展開の具体的な計算法や, 確率微分方程式の解の path-dependent functional $f(X_t^x : 0 \le t \le T)$ の弱近似の構成法なども時間の許す限り話したい.