Elephant random walk conditioned to avoid zero

徳光 剛 (大阪大学大学院理学研究科)

伊庭 滉基氏 (阪大理) との共同研究に基づく.

1 序

Elephant random walk (ERW) は，Schütz と Trimper [2] により導入された強化型確率過程の一つであり，過去の増分に依存して次の増分が決定される．具体的には，$S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ $(n \geq 1)$ とし，増分列 $(X_n)_{n\geq 1}$ を次のように定める：

$$X_1 = \begin{cases} +1 & \text{確率 } q, \\ -1 & \text{確率 } 1-q, \end{cases}$$

$$X_{n+1} = \begin{cases} +X_{U_n} & \text{確率 } p, \\ -X_{U_n} & \text{確率 } 1-p. \end{cases}$$

ここで，$p, q \in (0,1)$ であり，U_n は $\{1, \ldots, n\}$ 上の一様分布に従う．また，すべてのランダムな選択は互いに独立であるとする．

(S_n) の拡散挙動は $p = 3/4$ において相転移を起こすことが知られている．実際，その分散は

$$\mathrm{Var}(S_n) \sim \begin{cases} \dfrac{n}{3-4p} & \text{if } 0 < p < \frac{3}{4}, \\ n \log n & \text{if } p = \frac{3}{4}, \\ \left\{ \dfrac{1}{(4p-3)\Gamma(4p-2)} - \dfrac{(2q-1)^2}{\Gamma(2p)^2} \right\} n^{4p-2} & \text{if } \frac{3}{4} < p < 1 \end{cases}$$

を満たす.

ERW は過去の増分に依存するが，(S_n) は時間非一様なマルコフ連鎖であり，$n \geq 1$ および到達可能な状態 x に対して

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = x \pm 1 \mid S_n = x) = \frac{1}{2} \pm \left(p - \frac{1}{2}\right) \frac{x}{n}$$

が成り立つ．ここで，$\mathbb{P}$ は ERW の分布である．特に，時空間過程 $((n, S_n))_{n\geq 0}$ は時間一様なマルコフ連鎖となる．

本講演では，伊庭–徳光 [1] に基づき，原点を避ける ERW の構成とその長時間挙動を紹介する．本予稿では，得られた結果のうち，過程の構成とスケーリング極限を取り上げる．その他の結果については講演で紹介する．

2　原点を避ける ERW の構成

以下，$0 < p \leq 3/4$ とし，$a_n := \Gamma(n)/\Gamma(n+2p-1)$，$T_0 := \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$ とおく．原点を時刻 N まで訪れないという条件の下での (S_n) の有限次元分布は，$N \to \infty$ において次のように収束する．

定理 2.1. 任意の $m \geq 0$ および $A \in \sigma(S_0, \ldots, S_m)$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A \mid T_0 > N) = \mathbb{E}\left[1_A \frac{h(m, S_m)}{h(0,0)} 1_{\{T_0 > m\}}\right],$$

ただし，$h(0,0) = a_1$ かつ $m \geq 1,\ y \in \mathbb{Z}$ に対して $h(m,y) = a_m|y|$.

ここで，h は原点で死滅する ERW に対する時空間調和関数である．確率測度 $\mathbb{Q}$ を

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\sigma(S_0,\ldots,S_m)} = \frac{h(m,S_m)}{h(0,0)} 1_{\{T_0>m\}}$$

で定義する．$\mathbb{Q}$ の下での (S_n) を *Elephant Random Walk Conditioned to Avoid Zero*（原点を避ける ERW）と呼ぶ.

3　3 次元 Bessel 過程へのスケーリング極限

本節では，(S_n) を $\mathbb{Q}$ の下で考え，$(R_t)_{t\geq 0}$ を原点から出発する 3 次元 Bessel 過程とする．また，$D((0,\infty))$ を $(0,\infty)$ 上の実数値右連続左極限を持つ関数全体からなる空間とし，Skorokhod の J_1 位相を入れる．次の 2 つの定理は，それぞれ $0 < p < 3/4$ および $p = 3/4$ におけるスケーリング極限を与える．

定理 3.1. $0 < p < 3/4$ なら，$n \to \infty$ のとき，$D((0,\infty))$ 上で

$$\left(\frac{|S_{[nt]}|}{\sqrt{n}}\right)_{t>0} \Longrightarrow \left(\frac{t^{2p-1}}{\sqrt{3-4p}} R_{t^{3-4p}}\right)_{t>0}.$$

定理 3.2. $p = 3/4$ なら，$n \to \infty$ のとき，$D((0,\infty))$ 上で

$$\left(\frac{|S_{[n^t]}|}{\sqrt{n^t \log n}}\right)_{t>0} \Longrightarrow (R_t)_{t>0}.$$

参考文献

[1] Kohki Iba and Go Tokumitsu. Elephant random walk conditioned to avoid zero. *arXiv preprint arXiv:2607.28728*, 2026.

[2] G. M. Schütz and S. Trimper. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk. *Physical Review E*, 70(4):045101, 10 2004.