Freidlin–Wentzell type large deviation principle for Young/ rough differential equations driven by fractional Brownian motion

高野 凌史

本講演は，Peter K. Friz 氏（TU Berlin）との共同研究に基づく．以下では，次の積分方程式の解 $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ に対する（Freidlin–Wentzell 型）大偏差原理を考える：

$$X_t^\varepsilon = X_0 + \varepsilon \int_0^t \sigma(X_r^\varepsilon) dB_r^H, \quad X_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

ここで，$d, n \geq 1$, $\varepsilon \in (0,1)$, B^H は Hurst 指数 $H \in (\frac{1}{3}, 1)$ の d 次元非整数 Brown 運動であり，係数 $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ は十分良いとする（後に議論する.）方程式 (1) に現れる積分であるが，$H > \frac{1}{2}$ では Young 積分と定義し，$H \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ では（B^H の標準的な幾何学的ラフパスリフトから決まる）ラフパス積分と定義する．

ここで，係数 σ の条件について Hölder 空間の枠組みで議論する（つまり，$\sigma \in C^{\gamma\text{-Hld}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times d})$ と考え，γ の条件に着目する.）よく知られているように，$\gamma > \frac{1-H}{H}$ という条件下では，Young 積分方程式（resp. ラフ微分方程式）として方程式 (1) に対する解の存在が証明できる [4]．一方，解の一意性については，異なる二つの解を比較する観点から，追加の正則性条件が必要となる．典型的には，決定論的な解の well-posedness（解の存在と一意性）は次の条件で保証される [1].

$$\gamma > \frac{1-H}{H} + 1 = \frac{1}{H} \tag{2}$$

一方で，Matsuda, Perkowski, Mayorcas により, 方程式 (1) の確率論的な解の well-posedness が研究された [9, 8]．[8] では，σ に対する一様楕円条件と，条件

$$\gamma > \frac{1}{2H} \vee \frac{1-H}{H} \tag{3}$$

の下で, (決定論的な解の一意性ではなく，同じフィルトレーションに適合する解の間での）pathwise uniqueness が証明された．条件 (3) は，(2) より弱い条件である．$H = \frac{1}{2}$ の場合，方程式 (1) は Stratonovich SDE と一致するため，$\gamma > 1$ の下では σ に対する（一様）楕円条件が現れるのは自然である．本講演では，一意性に関するこの正則性条件の緩和に鑑み，条件 (3) の下で大偏差原理が成立することを示す.

強い条件 (2) の下では，ラフパス理論の枠組みで解写像が連続となるため，方程式 (1) の解に対する大偏差原理は直ちに証明できる [7, 3]．γ の正則性が代償となるが，この証明法は見通しが良く，半マルチンゲールでない $H \neq \frac{1}{2}$ の場合に適用できる利点がある．一方で，条件 (3) の下では，このような連続性に基づく決定論的議論は適用できない．このような状況下においても，方程式 (1) の大偏差原理を証明できることが分かった.

Theorem 0.1 (Friz & T. (2026+)). $H \in (\frac{1}{3}, 1)$ とする． σ は一様楕円条件を満たすとし，条件 (3) を仮定する．このとき， $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は，一様位相を備えた連続関数空間 $C([0,1], \mathbb{R}^n)$ 上で，スピード ε^{-2} で以下のレート関数 J について大偏差原理を満たす．

$$J(x) := \inf\left\{\frac{1}{2}\|h\|^2_{\mathcal{H}_H} : x = \varphi^h,\ h \in \mathcal{H}_H\right\}$$

ここで，$\mathcal{H}_H$ は B^H の Cameron-Martin 空間であり，φ^h は次の積分方程式の解である：

$$d\varphi^h_t = \sigma(\varphi^h_t)dh_t, \quad \varphi^h_0 = X_0, \quad h \in \mathcal{H}_H. \tag{4}$$

定理に現れる方程式 (4) について注意を述べる．まず $H > \frac{1}{2}$ の場合，$\mathcal{H}_H \hookrightarrow C^{1\text{-var}}$ なので，方程式 (4) に現れる積分は Riemann-Stieltjes 積分である．ただし，$\gamma < 1$ となり得るので，方程式 (4) の解は（存在するが）一意とは限らない．このような場合でも，固定した x に対して，$x = \varphi^h$ を満たす $h \in \mathcal{H}_H$ を探す，という意味で J は well-defined である（[6] に現れる解集合の定義の方が誤解がないが，ここでは古典的なレート関数の形に揃えた．）次に $H \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ の場合，[2] の系 1 から，$\mathcal{H}_H \hookrightarrow C^{q\text{-var}}$ $(\frac{1}{H+\frac{1}{2}} < q < \gamma \wedge 2)$ がわかるので，方程式 (4) に現れる積分は Young 積分である．この場合は $\gamma > q$ であるため，方程式 (4) の解は一意的に決まる．$H = \frac{1}{2}$ の場合は，$\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \hookrightarrow C^{1\text{-var}}$ かつ $\gamma > 1$ であるので，方程式 (4) の解は一意に定まる．

References

[1] A. Davie, Differential equations driven by rough paths: an approach via discrete approximation, Applied Mathematics Research eXpress (2008):

[2] P.K. Friz, N. Victoir, A variation embedding theorem and applications, Journal of Functional Analysis, Volume 239, Issue 2, 2006.

[3] P.K. Friz, and N. Victoir, Large deviation principle for enhanced Gaussian processes. Annales de l'IHP Probabilités et statistiques. Vol. 43. No. 6. 2007.

[4] P.K. Friz, N. Victoir, *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications*, Cambridge University Press (2010).

[5] M. Freidlin, A. Wentzell, Random Perturbations of Dynamical Systems, Springer, 2012.

[6] A. Jacquier, A. Pannier,Large and moderate deviations for stochastic Volterra systems, Stochastic Processes and their Applications 149 (2022): 142-187.

[7] M. Ledoux, Z. Qian, T. Zhang, Large deviations and support theorem for diffusion processes via rough paths, Stochastic processes and their applications 102.2 (2002): 265-283.

[8] T. Matsuda, A. Mayorcas. Pathwise uniqueness for multiplicative young and rough differential equations driven by fractional Brownian motion. Ann. Appl. Probab. 35 (5) 3441 - 3489, 2025. https://doi.org/10.1214/25-AAP2200

[9] T. Matsuda, N. Perkowski. An extension of the stochastic sewing lemma and applications to fractional stochastic calculus. Forum Math. Sigma 12, e52, 2024. https://doi.org/10.1017/fms.2024.32