Essential spectrum for Brox-type diffusion processes

塩沢 裕一（同志社大学）*

本講演は Jian Wang 氏 (Fujian Normal University) との共著論文 (arXiv:2607.07410v1) に基づく. Brox (1986) は, ドリフトがブラウン運動の微分で定まる 1 次元拡散過程を導入し, その劣拡散性を示した. Brox 型拡散過程は, ドリフトがランダム場の微分で定まる多次元ユークリッド空間上の拡散過程であって, 次元に依らず再帰的になり得る [福島–中尾–竹田 (1987), 田中 (1993), 楠岡–高橋–田村 (2015/2017) など]. 本講演では, Brox 型拡散過程に対応するマルコフ半群の (非) コンパクト性に着目し, ランダム場が与える影響を調べる.

以下では $\mathrm{d}x$ を $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度とし, $w : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を局所有界な可測関数とする. $\mathbb{R}^d$ 上の測度 μ^w を $\mu^w(\mathrm{d}x) = e^{-w(x)}\,\mathrm{d}x$ と定める. このとき, μ^w は $\mathbb{R}^d$ 上の正値ラドン測度であって, $\mathbb{R}^d$ 全体に台をもつ. $L^2(\mathbb{R}^d;\mu^W)$ 上の 2 次形式 $(\mathcal{E}^w, \mathcal{D}(\mathcal{E}^w))$ を次で定義する:

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}^w) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d;\mu^w) : \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2\, e^{-w(x)}\mathrm{d}x < \infty \right\},$$
$$\mathcal{E}^w(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\, e^{-w(x)}\mathrm{d}x, \quad u,v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^w).$$

ただし, $\cdot$ は $\mathbb{R}^d$ の標準内積を表す. また, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上のなめらかな関数であってコンパクト台をもつもの全体の集合とする. すると, w の局所有界性より $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^w)$ が従う. 特に, バナッハノルム $\|u\|_w = (\mathcal{E}^w(u,u) + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d;\mu^w)})^{1/2}$ $(u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^w))$ による $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の閉包を $\mathcal{F}^w$ とかくと, $(\mathcal{E}^w, \mathcal{F}^w)$ は $L^2(\mathbb{R}^d;\mu^w)$ 上の正則ディリクレ形式になる [Mathieu (1994)]. さらに, $(\mathcal{E}^w, \mathcal{F}^w)$ の生成作用素 L^w は形式的に次の表示をもつ:

$$L^w = \frac{1}{2}e^w \sum_{k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k}\left(e^{-w}\frac{\partial}{\partial x_k}\right).$$

作用素 $-L^w$ の本質的スペクトルを $\sigma_{\mathrm{ess}}(-L^w)$ とかき, その下限を λ^w_{ess} とおく. このとき, $-L^w$ により生成される $L^2(\mathbb{R}^d;\mu^w)$ 上のマルコフ半群が非コンパクトであることは, $\sigma_{\mathrm{ess}}(-L^w) \neq \emptyset$, すなわち $\lambda^w_{\mathrm{ess}} \in [0,\infty)$ が成り立つことと同値である.

w がランダム場で与えられるとき, w の有界性やなめらかさは期待できない. したがって, 生成作用素の表示や 2 次形式の比較を用いてスペクトルの性質を調べることは困難である. ここでは, 楠岡–高橋–田村 (2015/2017) の定式化を参考にして, ランダム場が **(1) 空間斉次ガウス過程**; **(2) 半自己相似レビ過程**から定まる場合に, ランダム場の特性および体積増大度の解析を通じて, 本質的スペクトルの下限を調べる.

(1) 空間斉次ガウス過程

$(\{W(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}, Q)$ を, $\mathbb{R}^d$ を添字集合とする中心化された実ガウス過程とする. ここでは, その共分散構造が空間斉次的であると仮定する. すなわち, ある関数 $\sigma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が存在して次の等式が成り立つとする:

$$E^Q\left[(W(x)-W(y))^2\right] = \sigma(|x-y|)^2, \quad x,y \in \mathbb{R}^d.$$

*本研究は JSPS 科研費 23K25773 の助成を受けたものです.

例えば $H \in (0,1)$ を任意に選び, $\sigma(r) = r^H$ $(r \geq 0)$ とおくと, 対応するガウス過程は Hurst 指数 H の非整数ブラウン場となる.

定理 1. $\sigma(r)$ $(r \geq 0)$ は単調非減少な連続的微分可能関数で, $r = 0$ では指数 $\alpha \in (0,1)$ の正則変動性を, $r = \infty$ では指数 $\beta \in (0,1)$ の正則変動性をもつとする. さらに, ある定数 $c_0 > 0$ が存在して $r|\sigma'(r)| \leq c_0\sigma(r)$ $(r > 0)$ が成り立つとする. このとき $\lambda^W_{\mathrm{ess}} = 0$, Q-a.s.

定理 1 の証明の方針は, 体積増大度による λ^W_{ess} の評価 [Notarantonio (1998)] に帰着させることである. そのために, ガウス場に対する upper rate function の評価 [河野 (1975)] を用いて, $Q(\mu^W(\mathbb{R}^d) = \infty) = 1$ であることと, μ^W に関する体積増大度が劣指数的であることを示す.

(2) 半自己相似レビ過程

$(\{V_+(x)\}_{x\geq 0}, Q)$ を指数 $\alpha \in (0,2)$ の 1 次元半自己相似レビ過程とし, $Q(V_+(0) = 0) = 1$ を仮定する. ここで, 定数 $r_0 \in [1,\infty)$ を次で定める:

$$r_0 = \inf\left\{c > 1 \mid \text{ 法則 } Q \text{ の下で } \{V_+(cx)\}_{x\geq 0} \overset{d}{=} \{c^{1/\alpha}V_+(x)\}_{x\geq 0}\right\}.$$

$r_0 = 1$ のとき, $(\{V_+(x)\}_{x\geq 0}, Q)$ は (自己相似な) 指数 α の安定過程となる. 一方, $r_0 > 1$ のとき, 任意の整数 n に対して, 法則 Q の下で $\{V_+(r_0^n x)\}_{x\geq 0} \overset{d}{=} \{r_0^{n/\alpha}V_+(x)\}_{x\geq 0}$ が成り立つ [佐藤 (2013, Theorem 13.11)]. $r_0 > 1$ のとき, $(\{V_+(x)\}_{x\geq 0}, Q)$ を (r_0, α) 半自己相似レビ過程という.

$(\{V_-(-x)\}_{x\geq 0}, Q)$ を $(\{V_+(x)\}_{x\geq 0}, Q)$ の独立なコピーとし, 確率変数 $V(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, $W(z)$ $(z \in \mathbb{R}^d)$ をそれぞれ以下で定める:

$$V(x) = \begin{cases} V_+(x) & (x \geq 0), \\ V_-(-x) & (x < 0), \end{cases} \qquad W(z) = \sum_{k=1}^{d} V(z_k) \quad (z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d). \tag{$*$}$$

定理 2. (1) $\alpha \in (1,2)$ かつ $Q(V(1) < 0) > 0$ を仮定する. このとき $\lambda^W_{\mathrm{ess}} = 0$, Q-a.s.

(2) $d = 1$ とする. $(\{V_+(x)\}_{x\geq 0}, Q)$ が対称ならば, 任意の $\alpha \in (0,2)$ に対して $\lambda^W_{\mathrm{ess}} = 0$, Q-a.s.

定理 2 (1) の証明の方針は, 定理 1 と同様に, 体積増大度による λ^W_{ess} の評価に帰着させることである. そのために, 半自己相似レビ過程の upper rate function を見出し, μ^W に関する体積増大度が劣指数的であることを示す. また, $Q(\mu^W(\mathbb{R}^d) = \infty) = 1$ を示すために, 楠岡–高橋–田村 (2017) の議論に沿って, 半自己相似レビ過程のスケール則に関するエルゴード性を用いる. (2) の証明では, 1 次元拡散過程の生成作用素に対するスペクトル評価 [Pinsky (2009)] を適用する.

最後に, ランダム場によるドリフトで生成作用素を摂動することで, 対応するマルコフ半群のコンパクト性が変化し得ることを述べる. 以下では $d = 1$ とし, $W(x)$ は式 $(*)$ で定めたものとする. $\delta > 0$ に対して $w(x) = |x|^\delta$ または $w(x) = -|x|^\delta$ とする. このとき, 例えば [Pinsky (2009)] より, 次の同値関係が従う:

$$\lambda^w_{\mathrm{ess}} = \infty \iff \delta > 1, \quad \lambda^w_{\mathrm{ess}} \in (0,\infty) \iff \delta = 1.$$

命題 3. $\delta \in (0, 1/\alpha]$ ならば $\lambda^{w+W}_{\mathrm{ess}} = 0$, Q-a.s.

命題 3 の証明の方針は, 1 次元拡散過程の生成作用素に対するスペクトル評価 [Pinsky (2009)] を適用することである. そのために, 定理 2 (1) の証明と同様に, 半自己相似レビ過程のスケール則に関するエルゴード性を用いる.

注意 4. (i) 命題 3 は, ランダム場によって本質的スペクトルの下限の値が変化する例を与える. 実際, $\alpha \in (0,1)$ かつ $\delta \in (1, 1/\alpha]$ のとき, $\lambda^w_{\mathrm{ess}} = \infty$ であるが, $\lambda^{w+W}_{\mathrm{ess}} = 0$, Q-a.s. となる. また, $\alpha = 1$ かつ $\delta = 1$ のとき, $\lambda^w_{\mathrm{ess}} \in (0,\infty)$ であるが $\lambda^{w+W}_{\mathrm{ess}} = 0$, Q-a.s. となる.

(ii) $\delta > 1/\alpha$ のとき, $\sigma_{\mathrm{ess}}(-L^{w+W})$ が空か否かは現時点では不明である.