確率微分方程式の数値解析 I: 楠岡近似の理論とその発展

篠崎 裕司 (一橋大学大学院経営管理研究科 金融戦略・経営財務プログラム)*

本講演の目的は，確率微分方程式の高次弱近似の枠組みである楠岡近似について，その理論・実装・最近の発展の全体像を，確率解析を専門とする方々に向けて紹介することである．

問題設定: $V_0, \dots, V_d \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$ とし，多次元ブラウン運動 $(B^1, \dots, B^d)$ で駆動されるストラトノヴィッチ形の確率微分方程式（SDE）

$$X(t,x) = x + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t V_i(X(s,x)) \circ dB^i(s), \qquad B^0(t) = t,$$

の解に対し，期待値 $(P_T f)(x) = E[f(X(T,x))]$ を数値的に求める問題（弱近似問題）を考える．シミュレーション法では，時間分割 $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$ 上で X を近似する確率変数 $\left\{X^{(n)}(t_i,x)\right\}_{i=0,\dots,n}$ を作り，$\hat{E}[f(X^{(n)}(T,x))]$ を（準）モンテカルロ法などで計算する（$\hat{E}[\cdot]$ は近似過程を定義する確率空間上の期待値）．このとき $\left|E[f(X(T,x))] - \hat{E}[f(X^{(n)}(T,x))]\right|$ を弱近似誤差とよぶ．ある定数 $C > 0$ があって，任意の n に対しある時間分割で弱近似誤差が Cn^{-p} 以下となるとき p 次の離散化といい，オイラー・丸山法は $p = 1$ である．離散化の次数 p を上げると，少ない分割数 n で精度が得られるだけでなく $\hat{E}[\cdot]$ の積分次元も下がり，準モンテカルロ法と併用することで，少ないサンプル数でも高精度の計算が可能となる．とくに数理ファイナンスでは，デリバティブ価格がこの期待値計算により定式化され，ヘッジを通じたリスク制御を行う（将来価格の予測ではない）ことから，高精度の数値計算が要求される．また f は滑らかとは限らないため，その場合の誤差評価が重要になる．

理論発展: 楠岡近似は，確率テイラー展開の期待値を自由リー代数上で一定次数まで一致させる近似作用素（m-similar operator）$Q_{(s)}$ を構成し，これを時間分割上で合成する高次弱近似の枠組みである [1, 2]．一般の m-similar operator に対する誤差評価では，弱近似誤差を以下の通り 1 ステップ誤差の和に分解する（telescoping）：

$$\|P_T f - Q_{(s_1)} \circ \cdots \circ Q_{(s_n)} f\|_\infty \le e^{CT} \sum_{k=1}^{n} \|(P_{s_k} - Q_{(s_k)}) P_{\tau_k} f\|_\infty, \qquad s_k = t_k - t_{k-1},\ \tau_k = T - t_k. \quad (1)$$

各項の 1 ステップ誤差は, モーメント整合により $\|P_s g - Q_{(s)} g\|_\infty \le C(\sum_{\ell=m+1}^{M} s^{\ell/2} \|g\|_{V,\ell} + s^{(m+1)/2} \|\nabla g\|_\infty)$ と評価される（$\|\cdot\|_{V,\ell}$ は V_0 単独を除く $V_{[\alpha]}$ 方向の ℓ 階微分の半ノルム）．telescoping (1) でこの評価を $g = P_{\tau_k} f$ に適用する際，マリアバン解析の結果から (UFG) 条件下で $\|P_{\tau_k} f\|_{V,\ell} \le C \tau_k^{-(\ell-1)/2} \|\nabla f\|_\infty$ が成り立つ．すなわち，f の微分を半群 P_{τ_k} の平滑化作用で吸収できる．評価が $\|\nabla f\|_\infty$ のみに依存するため，f が Lipschitz 連続の場合にも拡張でき，これが一般の楠岡近似理論の要点である．ただし，この評価では k 番目のステップの誤差評価が $s_k^{\ell/2} \tau_k^{-(\ell-1)/2}$ に依存するため，満期までの残り時間 τ_k が短いほどこの誤差の影響が大きくなる．そのため，この評価で高次（$(m-1)/2$ 次）弱近似を得るには，満期側を細かくする不均等分割（$t_k = T(1 - (1 - k/n)^\gamma)$，$\gamma > m - 1$）を用いる．

一方，Ninomiya–Victoir 法 [8] や Ninomiya–Ninomiya 法 [7] は，均等分割のままでも，滑らかでない f に対して数値的に 2 次収束を示した．Kusuoka [3] はこれを，正規確率変数で駆動される ODE の形をもつ m-similar operator の特別なクラス（Gaussian K-scheme）として正当化した．具体的には，パーシャル・マリアバン解析により近似作用素 $Q_{(s)}$ 側も P_s と同様に微分を評価することができ，均等時間分割かつ有界可測な f に対して高次弱近似を保証し，さらに誤差の主要項を特定してロンバーグ外挿を正当化する．講演ではまず，これらの研究を自由リー代数・マリアバン解析の使い方に焦点を当てて整理する．

*e-mail: yshinozaki@hub.hit-u.ac.jp

実装・高速化: 次に，具体的な手法の実装を紹介し，数値例により高速化の効果を示す．これらの手法は，いずれも乱数を係数にもつ ODE を解く形で実装される．Ninomiya–Victoir 法 [8] と Ninomiya–Ninomiya 法 [7] は，正規乱数を係数とするベクトル場の流れの合成による 2 次の手法である．3 次の手法 $Q_{(s)}^{(7,2)}$ 法 [11] はリー括弧を含む 1 本の流れで，レヴィ面積に正規乱数を割り当てて 7-similar を実現する．ODE を解くことを n 回繰り返し，連続型乱数なら（準）モンテカルロ法，離散型乱数ならツリーで期待値を計算する．Black–Scholes モデルと Heston モデルの下でのアジアンオプションの数値例では，均等分割のまま理論どおりの収束次数が観察される．なかでも $Q_{(s)}^{(7,2)}$ 法では，一定精度を得るための計算時間がオイラー・丸山法の約 1/250 となる例を紹介する．

展望: 最後に，最近の発展として，高次弱近似の精度を保った測度の圧縮（ツリーの再結合），より複雑な方程式系への拡張，機械学習への展開を紹介する．ラフパス理論とも密接に関連する Cubature on Wiener space [5] は，有限個の有界変動パスと重みにより反復積分（signature）の期待値を一定次数まで一致させる確定的な求積法である．このように離散型確率変数で近似するとツリーの点数が分割数 n について指数的に増大するが，ツリーの点の空間的な配置（点集合の小領域への分割）に注意しつつ，モーメントを保ったまま測度を再結合する再結合測度法が発展中である [4, 10]．また，SDE より複雑な系へ楠岡近似を適用する試みとして，前進後退 SDE の 2 次・3 次の離散化 [9] や，ヴォルテラ型（rough volatility）を有限次元マルコフ近似して楠岡近似を適用する手法 [12] を挙げる．機械学習への展開としては，高次弱近似に基づく学習機械 [6] や signature の活用が検討されている．さらに，Neural SDE や拡散モデルなど生成 AI 分野でも，SDE が近年注目されているが，SDE を直接離散化する部分ではオイラー・丸山型が主流であり，高次弱近似の活用は今後の課題であることにも触れる．

参考文献

[1] S. Kusuoka, Approximation of expectation of diffusion process and mathematical finance, *Adv. Stud. Pure Math.* 31, 147–165, 2001.

[2] S. Kusuoka, Approximation of expectation of diffusion processes based on Lie algebra and Malliavin calculus, *Adv. Math. Econ.* 6, 69–83, 2004.

[3] S. Kusuoka, Gaussian K-scheme: justification for KLNV method, *Adv. Math. Econ.* 17, 71–120, 2013.

[4] C. Litterer and T. Lyons, High order recombination and an application to cubature on Wiener space, *Ann. Appl. Probab.* 22, 1301–1327, 2012.

[5] T. Lyons and N. Victoir, Cubature on Wiener space, *Proc. R. Soc. Lond. A* 460, 169–198, 2004.

[6] Y. Ma and S. Ninomiya, A new architecture of high-order deep neural networks that learn martingales, in *Stochastic Analysis and Applications 2025*, Springer, 399–423, 2026.

[7] M. Ninomiya and S. Ninomiya, A new higher-order weak approximation scheme for stochastic differential equations and the Runge–Kutta method, *Finance Stoch.* 13, 415–443, 2009.

[8] S. Ninomiya and N. Victoir, Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing, *Appl. Math. Finance* 15, 107–121, 2008.

[9] S. Ninomiya and Y. Shinozaki, Higher-order discretization methods of forward-backward SDEs using KLNV-scheme and their applications to XVA pricing, *Appl. Math. Finance* 26, 257–292, 2019.

[10] S. Ninomiya and Y. Shinozaki, A high-order recombination algorithm for weak approximation of stochastic differential equations, *Finance Stoch.*, to appear, 2026.

[11] Y. Shinozaki, Construction of a third-order K-scheme and its application to financial models, *SIAM J. Financial Math.* 8, 901–932, 2017.

[12] Y. Shinozaki, Higher-order weak approximation for rough volatility models via Markovian approximation: drift-splitting time-discretization and its extrapolation, *Quantitative Finance*, 2026.