Quantitative Viability for Stochastic Partial Differential Equations

中山 季之 (Toshiyuki Nakayama)
周南公立大学 (Shunan University)
e-mail : nakayama_t25@shunan-u.ac.jp

1 はじめに

可分 Hilbert 空間 H 上の半線形 SPDE

$$\mathrm{d}X_t = (AX_t + \alpha(X_t))\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = h \in H \tag{1}$$

を考える．ここで A は H 上の C_0-半群 $(S_t)_{t\geq 0}$ の生成作用素，W は可分 Hilbert 空間 U に値をとる Q-Wiener 過程であり，$Q \in L(U)$ は核型，自己共役かつ正定値である．$U_0 := Q^{1/2}(U)$, $L_2^0(H) := L_2(U_0, H)$ とし，$\alpha : H \to H$ および $\sigma : H \to L_2^0(H)$ は大域的 Lipschitz 連続とする．初期値 h に対応する mild solution を X^h と書く．

閉集合 $K \subset H$ の stochastic invariance（viability）とは，K から出発した解が K に留まり続ける性質をいう．本研究では，$d_K(x) := \inf_{y\in K} \|x - y\|$, $K_\rho := \{x \in H : d_K(x) \leq \rho\}$ とおき，$h \in K_\rho$ に対する有限時間の離脱確率

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} d_K(X_t^h) > \rho + \eta \Big)$$

を評価する．先行研究 [1] では，確率的半群 Nagumo 条件の近似版を用いて，各固定時刻における

$$\Big(\mathbb{E}[d_K(X_t^h)^2]\Big)^{1/2}$$

の定量的評価を与えた．本研究ではこれを経路全体の問題へ発展させ，停止時刻と barrier function を用いた有限時間の離脱確率評価を与える．

本講演は，Stefan Tappe 氏との共同研究に基づく．

2 Stopped-barrier criterion

$\rho \geq 0, \eta \geq 0$ とし，$a_m := \rho + \eta + 1/m$, $\tau_m^h := \inf\{t \geq 0 : d_K(X_t^h) \geq a_m\}$ とおく．各 $m \in \mathbb{N}$ について非負 Borel 関数 Ψ_m と定数 $c_m > 0$, $\varepsilon_m \geq 0$ が存在し，

$$\Psi_m = 0 \text{ on } K_\rho, \qquad \Psi_m \geq c_m \text{ on } \{x \in H : d_K(x) \geq a_m\},$$

および任意の $h \in K_\rho$, $T > 0$ に対して

$$\mathbb{E}\big[\Psi_m(X^h_{T\wedge\tau_m^h})\big] \leq \varepsilon_m T$$

が成り立てば，

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} d_K(X_t^h) \geq a_m \Big) \leq \frac{\varepsilon_m T}{c_m}. \tag{2}$$

特に $\liminf_{m\to\infty} \varepsilon_m/c_m = \delta$ ならば

$$\mathbb{P}\big(X_t^h \in K_{\rho+\eta} \text{ for all } t \in [0,T]\big) \geq 1 - \delta T.$$

本研究では，より一般的な集合に対する unified viability theorem を証明し，その特別な場合として上記の評価を得る．この定理により，完全不変性と近似的不変性を統一的に扱うことができる．また，barrier function に対する条件は，extended generator と stopped Dynkin formula を用いて検証することもできる．

3　半線形 SPDE に対する離脱確率評価

$K \subset H$ を閉線形部分空間，P_K を K への直交射影，$R_K := I - P_K$ とする．ある $\beta \in \mathbb{R}$ に対して $\|S_t\| \le e^{\beta t}$ かつ $S_t K \subset K$ と仮定する．$\eta > 0$, $R := \rho + \eta$ とし，shell $\mathcal{S}_{\rho,\eta} := \{x : \rho < \|R_K x\| < R\}$ 上である $B, \delta \ge 0$ に対して

$$\beta \|R_K x\|^2 + \langle R_K x, \alpha(x) \rangle \le B, \qquad \|R_K \sigma(x)\|_{L_2^0(H)}^2 \le \delta^2 \tag{3}$$

が成り立つとする．$\Theta \in C_b^2(\mathbb{R}; [0,1])$ を非減少で $\Theta = 0$ on $(-\infty, \rho^2]$，$\Theta = 1$ on $[R^2, \infty)$ となるように選ぶ．このとき任意の $h \in K_\rho$，$T > 0$ に対して

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0 \le t \le T} d_K(X_t^h) > R \Big) \le T \left\{ (2B + \delta^2) \|\Theta'\|_\infty + 2R^2 \delta^2 \|\Theta''\|_\infty \right\}. \tag{4}$$

したがって，K に直交する方向の drift と diffusion を shell 上で制御すれば十分であり，K の有限次元性や線形作用素と拡散係数の同時対角化は不要である．証明では shifted Yosida approximation によって正則化した方程式に Itô の公式と (2) を適用し，一様評価を元の mild solution に移す．

4　金利期間構造モデルへの応用

一因子 Heath–Jarrow–Morton–Musiela モデルでは，Svensson 型の 5 次元部分空間 K に対し，整合性条件のもとで $d_K(X_t^h) \le d_K(h)$ がすべての $t \ge 0$ についてほとんど確実に成り立つ．従って任意の tube K_ρ は不変である．

一方，金利期間構造の変動成分（fluctuation）を記述する Cont 型の無限次元因子モデルとして，線形 SPDE

$$\mathrm{d}X_t = A X_t \,\mathrm{d}t + \Sigma \,\mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = h \in H$$

を考える．ここで $\Sigma \in L_2^0(H)$ とする．H の正規直交基底 $(f_n)_{n \ge 1}$ および U_0 の正規直交基底 $(g_n)_{n \ge 1}$ に対し，$A f_n = -a_n f_n$，$\Sigma g_n = \sigma_n f_n$，$a_n \ge 0$，$\sigma_n \in \mathbb{R}$ とする．$K_N := \mathrm{span}\{f_1, \dots, f_N\}$，$\delta_N^2 := \sum_{n > N} \sigma_n^2$ とおくと，上記の Θ と任意の $h \in (K_N)_\rho$，$T > 0$ に対して

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0 \le t \le T} d_{K_N}(X_t^h) > \rho + \eta \Big) \le T\big(\|\Theta'\|_\infty + 2(\rho + \eta)^2 \|\Theta''\|_\infty \big) \delta_N^2. \tag{5}$$

従って，捨てた因子方向のノイズの総分散 δ_N^2 が小さければ，有限因子空間の近傍からの離脱確率も小さく抑えられる．これは期間構造モデルの approximate consistency に対する経路単位の定量評価である．

参考文献

[1] T. Nakayama and S. Tappe, Distance between closed sets and the solutions to stochastic partial differential equations, arXiv:2205.00279v2, 2024.

[2] T. Nakayama and S. Tappe, Quantitative viability of closed sets for stochastic partial differential equations, manuscript in preparation.