On the lower bound of the spectral gap corresponding to the Feynman–Kac semigroup of killed symmetric stable processes

松浦將國（鹿児島工業高等専門学校）*

2026 年 12 月 3 日 †

Singer, Wong, S.-T.Yau と S.S.-T.Yau ([SWYY, Theorem 1.1]) は $\mathbf{R}^n$ 内の滑らかな境界を持つ有界凸集合上の Schrödinger 作用素 $-\Delta+V$ $(V \geq 0)$ のスペクトルギャップの上下評価を与えた．しかし，その手法はもっぱら解析的であった．一方，ポテンシャル項がない場合については，Kwaśnicki ([Kw, Theorem 1.1]) が劣マルコフ半群に対するスペクトルギャップの下方評価を，有界開集合外で消滅する対称安定過程の Lévy 核により与えた．さらに，Kaleta ([Ka, Theorem 1.3]) は $\mathbf{R}$ 上の区間 (a,b) 上の Schrödinger 型作用素 $(-\partial^2/\partial x^2)^{\frac{\alpha}{2}}+V$ $(1<\alpha<2)$ が与える Feynman-Kac 半群について，スペクトルギャップの下方評価を Lévy 核より厳しく $(b-a)^{-\alpha}$ のオーダーで与えた．しかし，Kaleta は作用素の第一固有関数が単峰性を持つことを示すために，ポテンシャルに中点 $(a+b)/2$ に関する対称性など厳しい制限を課していた．本講演ではこのポテンシャルの対称性を外し，滑らかな境界を持つ有界開集合から外へ出ると死滅する過渡的対称安定過程が与える Feynman-Kac 半群に対応するスペクトルギャップの下方評価が [Kw] と似た形で与えられることを提起する．

本講演では Green 緊密な正値加藤ポテンシャル μ を用いる．μ にある定点に関する対称性は仮定しない．ただし，2μ がゲージアブルであることを仮定する：

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} \mathbf{E}_x[e^{A^{2\mu}_\infty}](=||g^{2\mu}||_\infty)<\infty.$$

ここに，A^μ_t は μ に Revuz 対応する正値連続加法汎関数である．一方，D は有界連結で滑

* メールアドレス：matsuura@kagoshima-ct.ac.jp

† 研究集会「確率解析とその周辺」，東京科学大学大岡山キャンパス

らかな境界をもつ $\mathbf{R}^n$ 内の $C^{1,1}$ 開集合とする．そのとき，D 外へ出ると死滅する過渡的対称 α 安定過程 X_t $(0<\alpha<2, n>\alpha)$ により定められる Feynman-Kac 半群 $T_t^{\mu,D}$ とその積分核 k^D を考える．

$$\int_D k_t^D(x,y)f(y)\,dy = T_t^{\mu,D}f(x) = \mathbf{E}_x[e^{A_t^\mu} f(X_t); t<\tau_D]$$

Feynman-Kac 半群 $T_t^{\mu,D}$ の生成作用素 $\mathscr{L}_{\mu,D}$ を

$$\mathscr{L}_{\mu,D}f(x) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t^{\mu,D}f(x)-f(x)}{t}$$

と定める．その i 番目 $(i=1,2)$ の固有値を λ_i とし，第一固有値 λ_1 に対応する固有関数を $\varphi_1(x)$ とする．このとき，次の定理が成り立つ．

Theorem 1. δ が D の直径とすると，スペクトルギャップ $\lambda_2-\lambda_1$ は次の通り下方評価される：

$$\lambda_2-\lambda_1 \geq \frac{C_{\mu,\alpha,n}}{\delta^{\alpha+n}||g^{2\mu}||_\infty \lambda_1^{\frac{n}{\alpha}}}.$$

ここに，$C_{\mu,\alpha,n}$ は正定数である．

本講演では積分核 k^D の基本的性質を振り返りながら，第一固有関数 $\varphi_1(x)$ の Doob 変換による Dirichlet 形式からスペクトルギャップが与えられることを概観する．その上で，スペクトルギャップの下方評価が第一固有関数 $\varphi_1(x)$ の上限ノルムにより表され，さらにその上限ノルムが第一固有値 λ_1 により上方評価されることを示す．また，[B] を用いて本研究における仮定群を満たすポテンシャルの例も提示する．

参考文献

[B] Bendikov, A., *Asymptotic formulas for symmetric stable semigroups,* Expo. Math. 12 (1994), 381-384.

[Ka] Kaleta, K., *Spectral gap lower bound for the one-dimensional fractional Schrödinger operator in the interval,* Studia Math., **209** (3) (2012), 267-287.

[Kw] Kwaśnicki, M., *Spectral gap estimate for stable processes on arbitrary bounded open sets,* Probab. Math. Statist., **28** (1) (2008), 163-167.

[SWYY] Singer, I.M., Wong, B., Yau, S.-T., Yau, S.S.-T., *An estimate of the gap of the first two eigenvalues in the Schrödinger operator,* Ann. Sc. norm. super. Pisa, **12** (1985), 319-333.