A quantitative replica-symmetric bound for Sherrington–Kirkpatrick model in the entire de Almeida–Thouless region

楠岡誠一郎 (京都大学大学院理学研究科)

この講演は, 中島秀太氏 (慶應義塾大学) との共同研究 [2] に基づくものである. Sherrington-Kirkpartick モデル (SK モデル) は Edwards-Anderson モデルの平均場モデルとして導入されたもので, Ising モデルの一種である. $\Sigma_N = \{\pm 1\}^N$ とし, Hamiltonian H_N を

$$H_N(\sigma) := \frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{i,j;i<j} g_{ij}\sigma_i\sigma_j + h\sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad \sigma = (\sigma_i)_{i=1}^N \in \Sigma_N$$

で定める. ただし, $\beta \in [0,\infty)$ は逆温度, $h \in \mathbb{R}$ をランダムでない外場, $g = (g_{ij})_{1\le i<j\le N}$ は標準正規分布をもつ独立な確率変数の族とする. 分配関数 (partition function) Z_N, 期待自由エネルギー (expected free energy) ϕ_N, ギブス平均 (Gibbs expectation) $\langle\cdot\rangle$ を, それぞれ

$$Z_N := \sum_{\sigma\in\Sigma_N} e^{H_N(\sigma)}, \quad \phi_N := \frac{1}{N}\mathbb{E}[\log Z_N]$$
$$\langle F\rangle := \frac{1}{Z_N}\sum_{\sigma\in\Sigma_N} F(\sigma)e^{H_N(\sigma)}, \quad F : \Sigma_N \to \mathbb{R}$$

で定める. $\frac{1}{Z_N}e^{H_N(\sigma)}$ は, $g = (g_{ij})$ によるランダムな相互作用の下での, スピン σ が現れる確率となっている. ここでの興味は, ϕ_N の $N\to\infty$ における挙動である.

次に, レプリカ対称解 (replica-symmetric fixed point) $q = q(\beta,h)$ を, 方程式

$$q = \mathbb{E}\left[\tanh^2(h+\beta\sqrt{q}Z)\right], \quad Z\sim N(0,1)$$

の唯一解で定める. また, レプリカ対称自由エネルギー (replica-symmetric free energy) $\phi^{\mathrm{RS}}(\beta,h)$ を

$$\phi^{\mathrm{RS}}(\beta,h) := \log 2 + \mathbb{E}\left[\log\cosh(h+\beta\sqrt{q}Z)\right] + \frac{\beta^2}{4}(1-q)^2$$

で定める. そして, 次の性質をレプリカ対称性 (replica symmetry) と呼ぶ.

$$\lim_{N\to\infty}\phi_N(\beta,h) = \phi^{\mathrm{RS}}(\beta,h)$$

de Almeida と Thouless (1978) はレプリカ対称性が成り立つ範囲として,

$$\left\{(\beta,h)\in(0,\infty)\times\mathbb{R} : \alpha(\beta,h) := \beta^2\mathbb{E}\left[\cosh(h+\beta\sqrt{q}Z)^{-4}\right] < 1\right\}.$$

を予想した. この領域を de Almeida-Thouless 領域と呼ぶ. 曲線 $\alpha(\beta,h)=1$ は de Almeida-Thouless 曲線と呼ばれ, de Almeida と Thouless (1978) の論文ではこの部分も含まれていたことを注意として述べておく.

smart-path Hamiltonian $H_{N,t}$ $(t\in[0,1])$ を次で定める.

$$H_{N,t}(\sigma) := \frac{\beta\sqrt{t}}{\sqrt{2N}}\sum_{i,j=1}^N g_{ij}\sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^N (h+\beta\sqrt{(1-t)q}z_i)\sigma_i$$

ただし, (z_i) は標準正規分布をもつ独立な確率変数の族で, (g_{ij}) とも独立なものとする. $Z_{N,t}$ と $\phi_{N,t}(\beta,h)$ を, それぞれ Z_N と $\phi_N(\beta,h)$ と同様に, H_N の代わりに $H_{N,t}$ を用いて定める. ここで, $H_{N,1}=H_N$, $\phi_{N,1}(\beta,h)=\phi_N(\beta,h)$ が成り立つことを注意として述べておく.

$F:(\Sigma_N)^n\to\mathbb{R}$ に対して,

$$\langle F\rangle_t := \frac{1}{Z_{N,t}^n}\sum_{\sigma^1,\dots,\sigma^n\in\Sigma_N} F(\sigma^1,\dots,\sigma^n)e^{H_{N,t}(\sigma^1)}\cdots e^{H_{N,t}(\sigma^n)}$$

とし, $\nu_t[F]:=\mathbb{E}[\langle F\rangle_t]$ と定める. 重複度 (overlap) $R_{a,b}$ $(a,b\in\mathbb{N})$ を

$$R_{ab}:=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \sigma_i^a\sigma_i^b,\quad \sigma^a=(\sigma_i^a)_{i=1}^N,\ \sigma^b=(\sigma_i^b)_{i=1}^N\in\Sigma_N$$

で定める. 次の定理が, 本研究の主結果である.

定理 1 (c.f. [2])**.** *K を de Almeida-Thouless 領域に含まれるコンパクト集合とする. このとき, ある定数 C_K が存在して,*

$$\sup_{(\beta,h)\in K,t\in[0,1]}\nu_t[(R_{12}-q)^2]\le\frac{C_K}{N}$$

が成り立つ. これを用いることで

$$0\le\phi^{\mathrm{RS}}(\beta,h)-\phi_N(\beta,h)\le\frac{C_K}{N},\quad(\beta,h)\in K$$

が得られ, 特に *de Almeida-Thouless* 領域の任意の点 (β,h) に対しレプリカ対称性が成り立つ.

de Almeida-Thouless 領域全体においてレプリカ対称性が成り立つかどうかは, 長年未解決問題であったが, [4] において 4 月に解かれていた. この定理は自由エネルギーの差に対する明確な定量評価を与えており、さらに [2] における証明には [1] のアイデアを使っており、他の大きな結果に頼ることの無い自己完結的なものとなっている。また、証明は形式化することによって lean 4 による検証も行っている。検証のデータは [3] にある。

[1] Seiichiro Kusuoka and Shuta Nakajima, A note on Latała's argument in SK model, arXiv:2607.23427.

[2] Seiichiro Kusuoka and Shuta Nakajima, A quantitative replica-symmetric bound for Sherrington-Kirkpatrick model in the entire de Almeida-Thouless region, arXiv:2608.23413.

[3] Seiichiro Kusuoka and Shuta Nakajima, Formalization of "A quantitative replica-symmetric bound in strict AT region", GitHub repository, `https://github.com/njimaMath/research_public/tree/main/RSAT`.

[4] Patrick Lopatto, Replica symmetry up to the de Almeida–Thouless line in the Sherrington– Kirkpatrick model, arXiv:2604.11921.