Asymptotic error distributions for Euler–Maruyama schemes with additive semimartingale noise

広兼 巳紀雄[*1]（大阪大学）

本講演では，セミマルチンゲールを加法ノイズとする確率微分方程式に対するオイラー・丸山近似の誤差の漸近分布を考える．加法ノイズの場合，真の解と近似解に現れるノイズ項が一致するため，誤差はドリフトの時間積分の離散化からのみ生じる．ドリフトの局所的な正則性と，駆動過程の特性量の絶対連続性および標本路ごとの可積分性の下で，誤差を n 倍した過程の同時安定収束を示し，連続成分とジャンプの双方を含む極限過程を同定する．

Y を $Y_0 = 0$ を満たす q 次元 càdlàg セミマルチンゲール，$x_0 \in \mathbb{R}^d$ を確定的な初期値，$\sigma \in \mathbb{R}^{d\times q}$ を定数行列とする．$\varphi_n(t) = \lfloor nt \rfloor / n$ とおき，時間区間 $[0,1]$ 上で

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(X_{s-})\,ds + \sigma Y_t, \qquad \widehat{X}^n_t = x_0 + \int_0^t f(\widehat{X}^n_{\varphi_n(s)})\,ds + \sigma Y_t$$

を考える．$f \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, Df は局所リプシッツ連続であると仮定し, 解 X は $[0,1]$ 上で爆発しないと仮定する．原点近傍で恒等写像と一致する有界な切断関数に関して，Y の特性量 (B^Y, C^Y, ν^Y) は

$$B^Y_t = \int_0^t b_s\,ds, \qquad C^Y_t = \int_0^t c_s\,ds, \qquad \nu^Y(ds,dz) = F_s(dz)\,ds$$

と表され,

$$\int_0^1 \left(|b_s| + \mathrm{tr}(c_s) + \int_{\mathbb{R}^q} (1\wedge |z|^2) F_s(dz) \right) ds < \infty \quad \text{a.s.}$$

を満たすものとする．文献 [1] で仮定される martingale representation property は仮定せず，大ジャンプのモーメント条件や σ の階数に関する条件も課さない.

このとき，ベクトル値のスコロホッド J_1 位相を備えた $D([0,1],\mathbb{R}^{q+d})$ において，元の σ-代数 $\mathcal{F}$ に関する安定収束

$$\left(Y_{\varphi_n(\cdot)},\, n\big(X_{\varphi_n(\cdot)} - \widehat{X}^n_{\varphi_n(\cdot)}\big)\right) \Rightarrow^{\mathrm{st}} (Y,U)$$

が成り立つ．極限誤差 U は，次の線形積分方程式の一意な càdlàg 解である：

$$U_t = \mathcal{Z}_t + \int_0^t Df(X_{s-})U_s\,ds,$$
$$\mathcal{Z}_t = \frac{1}{2}\{f(X_t) - f(x_0)\} + \frac{1}{\sqrt{12}}\int_0^t Df(X_{s-})\sigma c_s^{1/2}\,dW_s + \mathcal{K}^f_t.$$

ここで，W は元の確率空間を拡張した空間上で定義された q 次元ブラウン運動であり，$\mathcal{F}$ と独立である．$\mathcal{K}^f$ は，各ジャンプに $[0,1]$ 上の一様分布に従う独立な乱数を対応させて構成されるジャンプ項である．

[*1] E-mail: hirokane@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

具体的に，Y の非零ジャンプ時刻を (T_p) とし，W および $\mathcal{F}$ と独立な，$[0,1]$ 上の一様分布に従う独立同分布の確率変数列 (κ_p) を用意する．マーク付きジャンプ測度とその補償測度を

$$\widetilde{\mu}^Y = \sum_{p:T_p\le 1} \delta_{(T_p,\Delta Y_{T_p},\kappa_p)}, \qquad \widetilde{\nu}^Y(ds,dz,du) = F_s(dz)\,ds\,du$$

とし，$H_s(z) = f(X_{s-}+\sigma z) - f(X_{s-})$ とおく．原点近傍で恒等写像と一致する $\mathbb{R}^d$ 上の有界な切断関数 h_f に対し，

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^f_t = &\int_0^t\int_{\mathbb{R}^q}\int_0^1 (u-\tfrac{1}{2})\,h_f(H_s(z))(\widetilde{\mu}^Y-\widetilde{\nu}^Y)(ds,dz,du)\\ &+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^q}\int_0^1 (u-\tfrac{1}{2})\,\{H_s(z)-h_f(H_s(z))\}\,\widetilde{\mu}^Y(ds,dz,du)\end{aligned}$$

と定める．特に，極限誤差のジャンプは

$$\Delta U_{T_p} = \kappa_p\{f(X_{T_p-}+\sigma\Delta Y_{T_p}) - f(X_{T_p-})\}$$

で与えられる．すなわち，ジャンプの寄与には，そのジャンプをまたぐドリフトの実際の増分が現れ，各ジャンプ時刻 T_p に対応する一つの一様乱数 κ_p が，増分ベクトルのすべての成分に共通に作用する．

連続時間の正規化誤差 $n(X-\widehat{X}^n)$ は連続であり，不連続な極限への J_1 収束は成立しない．そこで，ジャンプをもつ場合は駆動過程と誤差を同じ格子上で評価し，ジャンプ時刻を整合させて同時収束を得る．Y が連続な場合には，$(Y, n(X-\widehat{X}^n))$ から (Y,U) への安定収束が一様位相の下で成り立つ．

証明の基礎となるのは，有限次元セミマルチンゲール V の積分離散化誤差に関する同時安定極限定理

$$\left(V_{\varphi_n(\cdot)},\, n\int_0^{\varphi_n(\cdot)}(V_{s-}-V_{\varphi_n(s)})\,ds\right) \Rightarrow^{\mathrm{st}} (V,\mathcal{I}(V))$$

である．これは，V の特性量が時間について絶対連続であり，上記と同様の可積分性条件を満たす場合に，ベクトル値 J_1 位相において成立する．ガウス項と，独立な一様乱数を用いたジャンプ項を含む極限の形は既知である [1, 2]．本研究では，[1] で仮定される martingale representation property や，[2, 第 6 章] で不連続な駆動過程に課される仮定 (H) を用いずに，この同時安定収束を示す．この定理をセミマルチンゲール $(Y, f(X))$ に適用し，線形積分方程式を通じて極限を伝播させることで，オイラー・丸山近似の誤差の極限を得る．

さらに，Df の局所リプシッツ連続性を緩めた C^1 級ドリフトについても，次の二つの場合に同じ極限が得られる．一つは，駆動過程の連続局所マルチンゲール部分が消え，Df の連続性の度合いに応じた小ジャンプの可積分性条件を課す場合である．もう一つは，Y がレヴィ過程で，f の局所ソボレフ正則性と，σY の推移密度に対する平滑化評価を用いる場合である．例えば，σY が非退化なブラウン運動や回転対称 α-安定過程 $(1<\alpha<2)$ の場合には，局所 $C^{1,1}$ 級に属さないドリフトにも適用できる．

参考文献

[1] J. Jacod, A. Jakubowski and J. Mémin. On asymptotic errors in discretization of processes. *Ann. Probab.* **31** (2003), 592–608.

[2] J. Jacod and P. Protter. *Discretization of Processes*. Stochastic Modelling and Applied Probability, vol. 67. Springer, 2012.