Singular stochastic Volterra equations

濱口 雄史 (京都大学大学院理学研究科)

本講演の内容は, Oleg Butkovsky 氏 (Weierstrass Institute Berlin) および Kyeongsik Nam 氏 (KAIST) との共同研究に基づく.

決定論的な常微分方程式 $\mathrm{d}X_t = b(X_t)\,\mathrm{d}t$ では, ドリフト係数 b の正則性が不足すると, 解が存在しない, あるいは一意に定まらないことがある. 一方, (非整数)Brown 運動などのノイズを加えた確率微分方程式 (stochastic differential equation; SDE) $\mathrm{d}X_t = b(X_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t^H$ では, ノイズによってドリフトの効果が平均化され, 解の存在や一意性が回復する場合がある. さらに, この正則化効果により, ドリフト係数が超関数である場合にも, 適切な意味で解を定義・構成できることがある [4]. このように, ノイズを加えることで微分方程式の適切性が回復する現象は, ノイズによる正則化 (regularization by noise) と呼ばれる. 近年, Lê [10] による確率的縫合 (stochastic sewing) の導入を契機として, 特異なドリフト係数を持つ SDE の研究が急速に発展している.

本講演では, 特異なドリフト係数と特異な核を持つ確率 Volterra 方程式 (stochastic Volterra equation; SVE) を考え, 核の特異性や記憶効果がノイズによる正則化効果に及ぼす影響を考察する. 具体的には, 以下の d 次元 SVE を考える:

$$X_t = x + \int_0^t K(t-s)b(X_s)\,\mathrm{d}s + B_t^H, \quad t \in [0,1]. \tag{★}$$

ここで, B^H は Hurst 指数 $H \in (0,1)$ の非整数 Brown 運動を表し, $K(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta)}t^{\eta-1}$ は正則性指数 $\eta \in (0,1]$ の非整数核を表す. $\eta < 1$ の場合には核 K は特異的, すなわち $\lim_{t\downarrow 0} K(t) = \infty$ となることに注意する. また, ドリフト係数 b は正則性指数 $\alpha \in \mathbb{R}$ の非斉次 Besov–Hölder 空間 $\mathcal{C}^\alpha := \mathcal{B}^\alpha_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ の元であるとする. $0 < \alpha < 1$ の場合, $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ は有界な α-Hölder 連続関数である. 一方, $\alpha \le 0$ の場合, b は必ずしも関数ではなく, 超関数であり得る. 本研究で主として扱うのは, $\alpha < 1$ かつ $\eta < 1$ の場合である. このとき, **SVE (★) は, ドリフト係数 b と核 K に関する二重の特異性を持つ.** このような状況において, 非整数 Brown 運動 B^H による正則化がどの程度働くか, また, **どのようなパラメータ (α,η,H) の範囲で解の存在と一意性が保証されるか**が, 本研究の主要な問いである.

ドリフト係数 b が超関数である場合, SVE (★) の積分項は通常の意味では定義できず, 解の定式化自体が非自明である. 本研究では, 特異なドリフト係数を持つ SDE に関する研究 ([1, 2, 3] など) を参考に, b の滑らかな近似列を用いて解を定義する. 詳細は本講演で説明する.

本講演では, SVE の無限次元リフトの手法 [7, 8, 9] と "shifted" stochastic sewing の手法 [2, 5, 6, 11] を組み合わせたアプローチを説明し, SVE (★) の強解の存在と一意性について得られた結果を紹介する.

参考文献

[1] S. Athreya, O. Butkovsky, K. Lê, and L. Mytnik, Well-posedness of stochastic heat equation with distributional drift and skew stochastic heat equation. *Comm. Pure Appl. Math.* **77**(5), 2708–2777, 2024.

[2] O. Butkovsky, Lectures on stochastic sewing with applications. arXiv:2510.12165, 2025.

[3] O. Butkovsky, K. Lê, and L. Mytnik, Stochastic equations with singular drift driven by fractional Brownian motion. *Prob. Math. Phys.*, **6**, 857–912, 2025.

[4] R. Catellier and M. Gubinelli, Averaging along irregular curves and regularisation of ODEs. *Stochastic Process. Appl.*, 126(8), 2323–2366, 2016.

[5] L. Galeati and M. Gerencsér, Solution theory of fractional SDEs in complete subcritical regimes. *Forum Math. Sigma*, 13, e12, 2025.

[6] M. Gerencsér, Regularisation by regular noise. *Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations*, 11, 714–729 2022.

[7] Y. Hamaguchi, Markovian lifting and asymptotic log-Harnack inequality for stochastic Volterra integral equations. *Stochastic Process. Appl.*, 178, 104482, 2024.

[8] Y. Hamaguchi, Weak well-posedness of stochastic Volterra equations with completely monotone kernels and nondegenerate noise. *Ann. Appl. Probab.*, 35(2), 1442–1488, 2025.

[9] Y. Hamaguchi, Exponential ergodicity and finite-dimensional approximation for Markovian lifts of stochastic Volterra equations. arXiv:2603.03268.

[10] K. Lê, A stochastic sewing lemma and applications. *Electron. J. Probab.* **25**(38), 55, 2020.

[11] T. Matsuda and N. Perkowski, An extension of the stochastic sewing lemma and applications to fractional stochastic calculus. *Forum Math. Sigma*, 12, e52, 2024.