確率 gCLMG 方程式のエルゴード性

藤田 隼輔[*1]（早稲田大学 基幹理工学研究科）
福泉 麗佳（早稲田大学），　坂上 貴之（京都大学）

1　導入

乱流の統計的性質は Navier–Stokes 方程式の解の性質として説明されることが期待されている．乱流の現象を理解するため，無限次元力学系としてのアプローチを行う研究があるが，そもそも非定常 Navier–Stokes 方程式（特に 3 次元）では大域的適切性の問題が非常に難しい．この数学的困難さを背景に，本質的な性質を保持しつつ解析が容易で，より単純な 1 次元モデルが提案されている． Okamoto, Sakajo, Wunsch [3] は移流項にパラメータ $a \in \mathbb{R}$ を導入した一般化 Constantin–Lax–Majda–DeGregorio（以下 gCLMG）方程式

$$\omega_t + au\omega_x - u_x\omega = 0, \qquad u_x = \mathcal{H}(\omega), \qquad \omega(0,x) = \omega_0(x) \qquad (x \in \mathbb{S}^1 \coloneqq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, t > 0)$$

を提案し，$a \le -1$ のとき $\|\omega\|_{L^p}$（$p = -a$）が保存されることを示した．ここで $\mathcal{H}$ はヒルベルト変換であり，Fourier 変換 $\mathscr{F}$ を用いて

$$\mathcal{H}(\omega) = -\mathscr{F}^{-1} i \operatorname{sgn}(k) \mathscr{F}(\omega)$$

で定義される．ω は渦度，u は速度に対応する．特に $a = -2$ のときは $\|\omega\|_{L^2}^2$（エンストロフィーに対応）が非粘性保存量となり，2 次元乱流における保存則と類似する．本研究では，外力としてノイズを加えた次の確率 gCLMG 方程式を $a = -2$ の場合に考える：

$$\omega_t + au\omega_x - u_x\omega = \nu\omega_{xx} + \xi_t, \qquad u_x = \mathcal{H}(\omega), \qquad \omega(0,x) = \omega_0(x) \quad (x \in \mathbb{S}^1, t > 0). \tag{1}$$

ここで $\nu > 0$ は粘性係数であり，ノイズは

$$\xi(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} b_k \beta_k(t) e_k(x)$$

とする．$\mathbb{Z}^* \coloneqq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，$\{b_k\}$ は $B_0 \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} b_k^2 < \infty$ を満たす実数列，$\{\beta_k\}$ はフィルトレーション付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0})$ 上の独立な Brown 運動である． また，各 e_k は次で与えられる．

$$e_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), & (k \ge 1), \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(-kx), & (k \le -1). \end{cases}$$

本研究の目的は，(1) の解に付随する不変測度を構成し，その一意性と収束の性質を示すことである．

2　主結果

$H \coloneqq \{u \in L^2(\mathbb{S}^1) \mid \int_0^{2\pi} u(x)\,dx = 0\}$，$u_k \coloneqq \langle u, e_k\rangle_H \coloneqq \int_{\mathbb{S}^1} u(x) e_k(x)\,dx$ とし，$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\dot{H}^m \coloneqq \{u \in H \mid \|u\|_{\dot{H}^m}^2 \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |k|^{2m} u_k^2 < \infty\}, \quad B_m \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |k|^{2m} b_k^2$$

とおく．以下，$a = -2$ とし，$m \in \mathbb{N}$ を固定して，ある $m_* \in \mathbb{N}$，$m_* > m$ に対し $B_{m_*} < \infty$ を仮定する．解は mild solution の意味で考える．

定理 1 ([2], Theorem 2.6)**.** $\nu > 0$ とし，$\omega_0 \in \dot{H}^m$ は $\mathcal{F}_0$-可測とする．このとき (1) は $(\mathcal{F}_t)$-適合な一意な解 $\omega \in C([0,\infty); \dot{H}^m)$ をほとんど確実に持つ．

初期値 $y \in \dot{H}^m$ に対する解を $\omega(t;y)$ と書き，$\dot{H}^m$ 上の有界 Borel 関数 φ に対して $P_t\varphi(y) \coloneqq \mathbb{E}[\varphi(\omega(t;y))]$ とおく．$\dot{H}^m$ 上の確率測度 μ が任意の $t \ge 0$ と φ に対して $\int P_t\varphi\,d\mu = \int \varphi\,d\mu$ を満たすとき，μ を $(P_t)_{t\ge 0}$ の不変測度という．

定理 2 ([2], Theorem 3.2)**.** 任意の $\nu > 0$ に対し，$(P_t)_{t\ge 0}$ の不変測度 μ が $\dot{H}^m$ 上に存在する．さらにこの μ に対して

$$\int_{\dot{H}^m} \|y\|_{\dot{H}^{m+1}}^2 \,\mu(dy) < \infty$$

が成立する．

[*1] e-mail: fujimath@fuji.waseda.jp

定理 3 ([2], Theorem 4.4)**.** 各パラメタに依存しないある定数 $C_* > 0$ が存在して，$\nu^3 \geq 4C_*B_0$ ならば，$(P_t)_{t\geq 0}$ の $\dot{H}^m$ 上の不変測度は一意である．

H 上の確率測度 μ_1, μ_2 は H 上で 2 次モーメントが有限，すなわち

$$\int_H \|x\|_H^2 \, \mu_i(dx) < \infty \quad (i = 1, 2)$$

とする．このような μ_1, μ_2 に対し，Wasserstein-2 距離を

$$\mathcal{W}_2(\mu_1, \mu_2) \coloneqq \left(\inf_{\pi \in \Pi(\mu_1, \mu_2)} \int_{H\times H} \|y - z\|_H^2 \, \pi(dy, dz) \right)^{1/2}$$

で定める．ここで，$\Pi(\mu_1, \mu_2)$ は，周辺分布がそれぞれ μ_1, μ_2 である $H \times H$ 上の確率測度全体を表す．

さらに，P_t の adjoint を P_t^* と書き，一意な不変測度 μ と初期値 $\omega_0 \in \dot{H}^1$ に対して ε-mixing time を

$$\tau_{\mathrm{mix}}^{\omega_0}(\varepsilon) \coloneqq \inf \left\{ t \geq 0 \mid \mathcal{W}_2 \left(P_t^* \delta_{\omega_0}, \mu \right) \leq \varepsilon \right\}$$

で定める．

系 4 ([2], Corollary 4.4.1)**.** $\omega_0 \in \dot{H}^1$，ある $1_* > 1$ に対し $B_{1_*} < \infty$，$\nu^3 \geq 4C_*B_0$ とし，μ を $\dot{H}^1$ 上の一意な不変測度とする．このとき解は $\mathcal{W}_2$ 距離で exponentially mixing であり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\tau_{\mathrm{mix}}^{\omega_0}(\varepsilon) \leq \frac{2}{\gamma_*} \left[\frac{1}{2} \log \left\{ \left(2\|\omega_0\|_H^2 + \frac{2\nu^2}{C_*} \right) M \right\} + \log \frac{1}{\varepsilon} \right], \qquad \gamma_* \coloneqq \nu - \frac{C_*B_0}{\nu^2}$$

が成り立つ．ここで $M \coloneqq \int_{\dot{H}^1} \exp\left(\frac{2C_*}{\nu^2} \|y\|_H^2 \right) \mu(dy) < \infty$ である．

3　エルゴード性の枠組みに関する先行研究との関係

Barrera, Tölle [1] では，locally monotone な確率発展方程式に対して，退化しうる加法的ノイズのもとでの不変測度の一意存在および exponential mixing を示すフレームワークが与えられている．$a = -2$ の確率 gCLMG 方程式は，Gelfand triple $\dot{H}^1 \subset H \subset \dot{H}^{-1}$ とドリフト $\mathcal{A}(\omega) \coloneqq \nu\omega_{xx} + \mathcal{N}(\omega)$，$\mathcal{N}(\omega) \coloneqq u_x\omega + 2u\omega_x$ について [1] の仮定を満たし，Sobolev 埋め込み $\dot{H}^1 \subset L^\infty(\mathbb{S}^1)$ の定数 C_S に対して $\nu^3 \geq 12C_S^2B_0$ かつ $\nu \geq 4B_0$ のもとで H 上の不変測度の一意性が，さらに $\nu^3 > 12C_S^2B_0$ のとき $\mathcal{W}_2$ 距離での exponential mixing が [1] からも従う（[2], Appendix C）．H 上の一意性は $\dot{H}^m$ に台を持つ不変測度の中での一意性を導くので，定理 3 と系 4 の結論は [1] からも直接従う．一方，$\dot{H}^m$（$m \geq 1$）上での任意の粘性に対する不変測度の存在とその正則性（定理 2）は [1] からは従わない．実際，部分積分により $\langle u_x\omega + 2u\omega_x, \omega \rangle_H = 0$ が成立することは L^2 内積に固有のものであり，次が成り立つ．

命題 5 ([2], Lemma C.1, Proposition C.2)**.** $\varphi \coloneqq \cos x + \sin 2x$ とすると，任意の整数 $m \geq 0$ に対し

$$\langle \mathcal{N}(\varphi), \varphi \rangle_{\dot{H}^m} = \frac{3}{2}\pi(4^m - 1)$$

である．したがって $m \geq 1$ のとき，どのような定数 $K_1 \in \mathbb{R}$，$\hat{\delta}_1 > 0$，$\hat{\alpha} \geq 2$ に対しても，[1] の coercivity の仮定:

$$2 \langle \mathcal{A}(\omega), \omega \rangle_{\dot{H}^m} \leq K_1(1 + \|\omega\|_{\dot{H}^m}^2) - \hat{\delta}_1 \|\omega\|_{\dot{H}^{m+1}}^{\hat{\alpha}}$$

はすべての $\omega \in \dot{H}^{m+1}$ に対しては成り立たない．

[1] を参考にすることで mixing time の評価が [2] の初稿完成時に比べ改善された．任意の粘性に対するエルゴード性や，異なる種類のノイズに対する適切性は今後の課題である．

本研究は科研費（課題番号 19KK0066，23H00086） の助成を受けたものである．

参考文献

[1] G. Barrera and J. M. Tölle. Ergodicity and mixing for locally monotone stochastic evolution equations, 2024. arXiv:2412.01381.

[2] S. Fujita, R. Fukuizumi, and T. Sakajo. Ergodicity for a Constantin-Lax-Majda-DeGregorio model of turbulent flow at large viscosity. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 568, p. 131143, 2027.

[3] H. Okamoto, T. Sakajo, and M. Wunsch. On a generalization of the Constantin-Lax-Majda equation. *Nonlinearity*, Vol. 21, pp. 2447–2461, 2008.