

Stochastically forced compressible Navier–Stokes equations with slip boundary conditions of friction type

坪谷玲緒 (京都大学大学院理学研究科)

概要

本講演では、圧縮性のある流体の運動を記述する偏微分方程式系に確率論的な外力を駆動させた**確率圧縮性ナビエ・ストークス方程式** (Stochastically forced compressible Navier–Stokes equation; SCNSE) の境界値問題について論じる。ディリクレ境界条件、あるいは周期境界条件をもつトーラス上の解析は、数学的扱いやすさと物理的妥当性から最も標準的な境界条件として長く研究されてきた。しかし近年、この境界条件が流体力学において逆説的な物理現象をもたらすことが知られており、非標準とされてきた物理領域の境界上で滑りを許す境界条件が注目され始めている。決定論的な設定においてはこれらの境界条件に対する弱解理論の既存研究が多く存在する一方で、確率論的な設定でこのような境界条件を扱った文献は非常に少なく、我々の知る限り 3 次元領域における弱解の存在に関する一般的な結果は得られていない。そこで、藤田 [2] によって導入された**摩擦型滑り境界条件** (Slip boundary condition of friction type; SBCF) を検討し、滑り境界条件に対する弱解の存在について得られた自身の結果を紹介する。

問題設定

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし、SCNSE は流体密度 $\rho : \Omega \times (0, T) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ および流体速度 $u : \Omega \times (0, T) \times D \rightarrow \mathbb{R}^3$ を未知変数として、次のように記述される：

$$\begin{aligned} d\rho + \operatorname{div}(\rho u)dt &= 0 && \text{in } (0, T) \times D, \\ d(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u)dt &= \operatorname{div} \mathbb{T}dt + \mathbb{G}(\rho, \rho u)dW && \text{in } (0, T) \times D, \\ (\rho(0), (\rho u)(0)) &= (\rho_0, q_0) && \text{in } D, \end{aligned}$$

ただし、 $D \subset \mathbb{R}^3$ は有界リプシッツ領域、 $T > 0$ は固定された終端時刻、 $\mathbb{T}$ は以下で与えられる等エントロピー圧力法則に従う粘性ニュートン流体の応力テンソル：

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \underbrace{\mathbb{S}(\nabla u)}_{\text{viscous stress}} - \underbrace{p(\rho)\mathbb{I}}_{\text{pressure}}, \\ \mathbb{S}(\nabla u) &= \mu \left(\nabla u + (\nabla u)^T - \frac{2}{3} \operatorname{div} u \mathbb{I} \right) + \lambda \operatorname{div} u \mathbb{I}, \quad p(\rho) = a\rho^\gamma, \quad a > 0, \end{aligned}$$

$\mu > 0, \lambda \geq 0$ は粘性係数、 $\gamma > 1$ は断熱指数、 $\mathbb{I}$ は 3 次単位行列。 W は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で定義された柱状 Wiener 過程、拡散係数 $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\rho, \rho u)$ は一般の乗法ノイズで、適切な線形増大条件とリプシッツ条件を満たすものとする。1 つ目と 2 つ目の式はそれぞれ**連続の式**、**運動方程式**とよばれ、3 つ目は初期条件を表す。本研究ではさらに次の境界条件 (SBCF) を考える：

$$\begin{aligned} u \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{on } (0, T) \times \partial D, \\ |(\mathbb{T}\mathbf{n})_\tau| \leq g, \quad (\mathbb{T}\mathbf{n})_\tau \cdot u_\tau + g|u_\tau| &= 0 && \text{on } (0, T) \times \partial D, \end{aligned}$$

ただし、 ∂D は D の境界、 $\mathbf{n}$ は外向き法線ベクトル、非負関数 $g : (0, T) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ は摩擦係数を表し、記号 $u_\mathbf{n} = (u \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ 、 $u_\tau = u - u_\mathbf{n}$ を用いる。

本研究の要点

本研究の目標は、前節の問題に対して、一般の 3 次元有界領域上で、解析的にも確率論的にも弱い意味で大域解の存在を証明することである。すなわち、時刻 $T > 0$ と領域 D を任意に固定して、初期条件を確率法則 Λ として与えたとき、未知変数をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ 、柱状 $(\mathcal{F}_t)$ -Wiener 過程 W 、および (ρ, u) として、方程式を超関数の意味で満たすものを求める。さらに、境界条件を適切に解空間および方程式に組み込む必要が生じるが、SBCF の非線形性に対処するため、ある種の変分不等式として組み込む形となる。本研究ではまず上記の定式化を厳密に行い、この定式化のもとで正則な解が古典的な意味での解になることを証明した。その後この定式化のもとで解の構成を行う流れとなる。

SCNSE に対する 3 次元領域における大域的弱解の存在は [1] によって初めて確立され、ここでは周期境界条件をもつ 3 次元トーラス上で、4 層に渡って解を近似する方針がとられた。本研究における解の構成はこの考えに基づくものであり、さらに境界条件の障壁項 $g|u|$ の近似も考慮し [3] で用いられた凸近似法を採用する。したがって証明は次の 5 層によって展開され、(v) から (i) の順に近似していく：

- (i) ($\delta \rightarrow 0$) 層：密度 ρ の強い可積分性を確保するため、圧力を修正する： $p_\delta(\rho) := p(\rho) + \delta(\rho + \rho^\Gamma)$, $\Gamma \geq 6 \vee \gamma$.
- (ii) ($\varepsilon \rightarrow 0$) 層：放物型方程式の理論を用いるために、連続の式と運動方程式にそれぞれ粘性項 $\varepsilon \Delta(\rho)$, $\varepsilon \Delta(\rho u)$ を加え、さらに拡散係数に一樣有界性を課して近似する。
- (iii) ($m \rightarrow \infty$) Faedo-Galerkin 近似層：運動方程式を適切に有限次元に射影して、有限次元方程式の問題に帰着させる。
- (iv) ($\alpha \rightarrow 0$) 凸近似層：境界条件の障壁項 $g|u|$ を変分不等式に組み込み、適切な凸関数による絶対値の一樣収束列を用いて、下半連続性に基づき近似する。
- (v) ($R \rightarrow \infty$) 層：速度のノルムを定数 $R > 0$ で抑える。これにより密度 ρ の下からの評価が得られ、速度 u についての確率微分方程式が得られる。

解の構成における本研究の主な新規性は以下の通りである：

- (1) ディリクレ境界条件の場合、速度 u と運動方程式におけるテスト関数 ϕ の空間変数に対する関数空間は $W_0^{1,2}(D; \mathbb{R}^3)$ である一方、今回の設定においては $\{\phi \in W^{1,2}(D; \mathbb{R}^3) : \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial D\}$ を採用することとなる。この空間において稠密であるような $L^2(D; \mathbb{R}^3)$ からの有限次元近似を考える場合、直交射影 Π_m がもつ性質は著しく低下する。具体的には、次元 $m \in \mathbb{N}$ について一様に以下の性質を満たす近似を構成できるかが非自明となる：

$$\|\Pi_m \phi\|_{L^p(D; \mathbb{R}^3)} \lesssim \|\phi\|_{L^p(D; \mathbb{R}^3)}, \quad \|\Pi_m \phi - \phi\|_{W^{k,p}(D; \mathbb{R}^3)} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty), \quad \forall p \geq 1, k = 0, 1.$$

既存の近似手法は主にノイズ係数の近似を行う際にこれらの性質に大きく依存しているため、本研究ではこのような射影を回避する近似手法を新たに確立する。

- (2) 解を近似する際に、エネルギーを用いたアプリアリ評価が本質的となる。しかし、境界に自由度を与えた場合、速度を完全に制御するためには既存の手法だけでは不十分であり、よって境界摩擦を組み合わせることで制御する方針をとる。このために、Korn-Poincaré 不等式のさらなる一般化を行う。
- (3) $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ 近似において中心的となるのは、決定論的な有効粘性流束 $(\frac{4}{3}\mu + \lambda) \operatorname{div} u - p(\rho)$ の正則性を用いて密度 ρ の強収束を導出することである。本研究では、滑り境界条件においてもこの手法が確率論的な設定と整合的であることを確かめる。

参考文献

- [1] D. Breit and M. Hofmanová, Stochastic Navier-Stokes equations for compressible fluids, *Indiana Univ. Math. J.* **65** (2016), no. 4, 1183–1250.
- [2] H. Fujita, A mathematical analysis of motions of viscous incompressible fluid under leak or slip boundary conditions, **888** (1994), 199–216. *Mathematical fluid mechanics and modeling*, Kyoto, 1994.
- [3] Š. Nečasová, J. Ogorzaly, and J. Scherz, The compressible Navier-Stokes equations with slip boundary conditions of friction type, *Z. Angew. Math. Phys.* **74** (2023), no. 5, Paper No. 188, 20 pp.