

Wiener 空間上の 1 次変換と 2 次形式

谷口 説男*

はじめに

ラプラス変換型積分 (期待値) $\int_{\Omega} f e^q dP$ の具体的な表示を求めることは、確率論の様々な場面で重要な役割を担っている。本講演では、 $[0, T]$ 上の d 次元 Wiener 空間

$$\mathcal{W} = \{w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d; \text{連続}, w(0) = 0\}$$

を Ω , その上の Wiener 測度 μ を P とし, q を 2 次 Wiener カオスの元とした場合を考察する。このようなラプラス変換型積分の研究の歴史は長く, それぞれに応じて様々な手法が用いられている。それらを一望にできる統一的な枠組みを確立することが本講演の目的である。まずこれまでの研究を振り返り, その後, 統一的な枠組みの構築について紹介する。

1 長い昔話

N.Wiener による Wiener 測度の数学的定式化の後, 20 世紀中頃に Wiener 空間上のラプラス変換型積分の研究が始まった。まず, R.H.Cameron-W.T.Martin により, 1945 年に $d = 1, T = 1$, q が標本路 w の積分 $\int_0^1 p(t)w(t)^2 dt$ の場合にラプラス変換型積分の具体的な表示が与えられた。1951 年に M.Kac は $p \equiv 1$ の場合, すなわち $\int_0^1 w(t)^2 dt$ に対する初等関数によるラプラス変換型積分の表示式を示した。このとき, 積分 $\int_{\mathcal{W}} f e^q d\mu$ は調和振動子に対応する Schrödinger 作用素 $\frac{1}{2}(\frac{d}{dx})^2 + \lambda x^2$ と関係している。さらに, P.Lévy は同じ 1951 年に, $d = 1, T = 2\pi$, q が 2 次元 Wiener 過程が囲む確率面積 $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{w^1(t)dw^2(t) - w^2(t)dw^1(t)\}$ の場合に, 初等関数によるラプラス変換型積分の表示を与えた。このとき, $\int_{\mathcal{W}} f e^q d\mu$ は一様磁場に対応する Schrödinger 作用素 $\frac{1}{2}\Delta + \frac{\lambda}{2}\{x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}\}$ と関係している。彼らの研究からほぼ半世紀を経た 1990 年代に, 1980 年代に整備されたマリアバン解析を利用して, N.Ikeda, Sh.Kusuoka, S.Manabe, K.Hara らは, $d = 2$ の場合に, Volterra 作用素を用いたラプラス変換型積分の表示, Gauss 過程の定める確率面積や Plücker 座標による具体的な表示などについて研究を行った。著者も, 1990 年代後半から単独もしくは P.Malliavin, H.Sugita, N.Ikeda, Y.Inahama の諸氏と共同の研究において, Wiener 空間上の変数変換公式, 確率振動積分の漸近挙動, ODE の解によるラプラス変換型積分の表示, ソリトン解 (KdV 方程式) の期待値表示, べき零群の熱核の具体的な表示などについて調べた。それぞれを詳しく見ていこう。

1.1. Cameron-Martin は $d = 1, T = 1$ の場合を扱っている。論文「Evaluation of various Wiener integrals by use of certain Strum-Liouville differential equations」(Bull.

* e-mail: se2otngc@kyudai.jp

AMS 51 (1945), 73–90) において、彼らはつぎの表示式が成り立つことを証明した。

$$\int_{\mathcal{W}} \exp\left(\frac{\lambda}{2} \int_0^1 p(t)w(t)^2 dt\right) d\mu = \left\{ \frac{\phi_\lambda(1)}{\phi_\lambda(0)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

ただし、 ϕ_λ は $[0, 1]$ 上の常微分方程式 (以下 ODE と略す)

$$\phi_\lambda'' + \lambda p \phi_\lambda = 0, \quad \phi_\lambda'(1) = 0$$

の解である。証明に際し彼らは、先行論文「Transformations of Wiener integrals under a general class of linear transformations」(Trans. AMS 58 (1945), 184–219) において示した、以下の Wiener 空間上の変数変換公式を利用した。

『積分核 $K(t, s)$ をもつ線形変換 $\mathbb{T}: \mathcal{W} \ni w \mapsto w + \int_0^1 K(\cdot, s)w(s)ds$ に対し、つぎの変数変換公式が成り立つ。

$$|D| \int_S (f \circ \mathbb{T}) e^{-\Phi} d\mu = \int_{\mathbb{T}(S)} f d\mu.$$

ただし、 $D = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \det((K(s_i, s_j))_{1 \leq i, j \leq n}) ds_1 \cdots ds_n$ であり、 $S \subset \mathcal{W}$ は Borel 集合、 $\mathbb{T}(S) = \{\mathbb{T}w; w \in S\}$ とし、 Φ はつぎで与える。

$$\begin{aligned} \Phi(w) = & \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \int_0^1 K(t, s)w(s)ds \right]^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial K}{\partial t}(t, s)w(s)ds \right] dw(t) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 J(t)d\{[w(t)]^2\} \quad \left(J(t) = \lim_{u \downarrow t} K(u, t) - \lim_{u \uparrow t} K(u, t) \right). \end{aligned} \quad \text{』}$$

彼らは、“ $dw(t)$ ”, “ $d\{[w(t)]^2\}$ ” はともに Stieltjes 積分として実現されると述べている。 $dw(t)$ は Itô 積分とすべきであるが、Itô 積分は 1942 年に日本国内 (全国紙上数学談話会) においてのみ公表され、米国まで伝わるのは第 2 次世界大戦後である。

1.2. Kac は論文「On some connection between probability theory and differential and integral equations」(Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., 1951, 189–215) において、 $d = 1$, $T = 1$ のときに、 $\mathfrak{h} = \int_0^1 w(t)^2 dt$ を、正規分布 $N(0, 1)$ に従う独立同分布な確率変数列 $\{H_n; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ を用いて、つぎのような無限級数に展開した。

$$\mathfrak{h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2} H_n^2.$$

これにより、 $f \equiv 1$ の場合のラプラス変換型積分を

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\lambda \mathfrak{h}} d\mu = \prod_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{\lambda}{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2} x^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left\{ \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2\lambda}{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}\right) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

と変形できる。この無限積表示を利用して、彼は $\int_{\mathcal{W}} e^{\lambda \mathfrak{h}} d\mu$ の初等関数による表現を得ている。彼は上の無限級数展開をつぎのように証明している。

- ① $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $\varphi_n(t) = \sqrt{2} \sin((n + \frac{1}{2})\pi t)$ ($t \in [0, 1]$) で与えられる $L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ の正規直交基底 (以下 ONB と略す) とする.
- ② $L_n(w) = \int_0^1 w(t) \varphi_n(t) dt$ とおけば, Plancherel の等式により, $\mathfrak{h} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^2$ となる.
- ③ $\int_{\mathcal{W}} L_n L_m d\mu = \{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2\}^{-1} \delta_{nm}$ となる. よって, $\{L_n; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ はそれぞれが正規分布 $N(0, \{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2\}^{-1})$ に従う独立な確率変数列である.
- ④ $H_n = (n + \frac{1}{2})\pi L_n$ とおけばよい.

1.3. Lévy は論文「Wiener's random function, and other Laplacian random functions」(Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., 1951, 171–186) において, $d = 2, T = 2\pi$ の場合に, 確率面積 $\mathfrak{s} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{w^1(t) dw^2(t) - w^2(t) dw^1(t)\}$ が, 正規分布 $N(0, 1)$ に従う独立同分布な確率変数列 $\{\xi_n, \xi'_n, \xi', \eta_n, \eta'_n, \eta'; n \in \mathbb{N}\}$ を用いて,

$$\mathfrak{s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{ \xi_n (\eta'_n - \sqrt{2} \eta') - \eta_n (\xi'_n - \sqrt{2} \xi') \}$$

と無限級数展開できることを示した. この展開により, 彼は $\int_{\mathcal{W}} e^{\lambda \mathfrak{s}} d\mu$ (または $f \equiv 1$) を無限積で表現し, ラプラス変換型積分の初等関数による表示を得た. 彼はこの無限級数展開をつぎのように理由づけている.

- ① Wiener 過程 $\{w(t) = (w^1(t), w^2(t))\}_{t \in [0, 2\pi]}$ を一様収束ノルムに関しつぎのように展開する.

$$w^1(t) = \frac{\xi' t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \left\{ \xi_n (\cos(nt) - 1) + \xi'_n \sin(nt) \right\},$$

$$w^2(t) = \frac{\eta' t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \left\{ \eta_n (\cos(nt) - 1) + \eta'_n \sin(nt) \right\}.$$

ここで用いられているのは, N.Wiener が Wiener 測度を構成したときに用いた三角関数展開である. 後により一般に Itô-Nisio は, 論文「On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables」(Osaka Jour. Math. **5** (1968), 35–48) において, 正規分布 $N(0, 1)$ に従う独立同分布な確率変数列 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ と Cameron-Martin 空間 (後述) の ONB $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ から成る無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n h_n$ が一様ノルムに関し, Wiener 過程に収束することを示した.

- ② $w^1(t), w^2(t)$ を形式的に微分する.

$$dw^1(t) = \left(\frac{\xi'}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ -\xi_n \sin(nt) + \xi'_n \cos(nt) \right\} \right) dt,$$

$$dw^2(t) = \left(\frac{\eta'}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ -\eta_n \sin(nt) + \eta'_n \cos(nt) \right\} \right) dt.$$

- ③ これらの表示を $\mathfrak{s}$ に代入し, 三角関数の積の $[0, 2\pi]$ での積分を計算し整理する.

彼は「形式的な微分は確率解析的な考察により正当化できる」と述べている。

1.4. 1980 年代以降の成果を振り返るために、**Malliavin 解析の用語**について説明する。多項式 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ と $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathcal{W}^*$ ($\mathcal{W}$ の双対空間) を用いて $f(\ell_1, \dots, \ell_n)$ と表現できる実数値 Wiener 汎関数の全体を $\mathcal{P}$ と表す。 E を可分な実 Hilbert 空間とし、 $\mathcal{P}(E)$ を $\phi e (\phi \in \mathcal{P}, e \in E)$ という形の E 値 Wiener 汎関数の線形結合の全体とする。

Cameron-Martin 空間 $\mathcal{H}$ は、 $h' \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$ を用いて $h(t) = \int_0^t h'(s) ds$ ($t \in [0, T]$) と表される $h \in \mathcal{W}$ の全体である。 $\mathcal{H}$ は内積

$$\langle h, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T \langle h'(t), g'(t) \rangle dt \quad (h, g \in \mathcal{H})$$

をもつ可分な実 Hilbert 空間となる。ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の内積とする。 $\mathcal{H} \otimes E$ を $\mathcal{H}$ から E への Hilbert-Schmidt 作用素の全体とし、 $\mathcal{H}$ -微分 $D: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H} \otimes E)$ を

$$(D\Phi)[h] = \left. \frac{d}{da} \right|_{a=0} \Phi(\cdot + ah) \quad (\Phi \in \mathcal{P}(E), h \in \mathcal{H})$$

と定義する。 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \in (1, \infty)$ に対し、ノルム $\sum_{j=0}^k \|D^j \cdot\|_{L^p}$ ($\|\cdot\|_{L^p}$ は L^p -ノルム) による $\mathcal{P}(E)$ の完備化を $\mathbb{D}^{k,p}(E)$ と表わす。明らかに、

命題. $D: \mathbb{D}^{k,p}(E) \rightarrow \mathbb{D}^{k-1,p}(\mathcal{H} \otimes E)$ は連続である。 ■

さらに D はつぎの性質を持つ。

命題 ([9, Proposition 5.2.9]). $\Phi \in \mathbb{D}^{1,p}(E)$ が $D\Phi = 0$ を満たせば、 Φ は定数関数である。とくに $\Phi = \int_{\mathcal{W}} \Phi d\mu$ となる。 ■

この命題により、 $\Phi, \Psi \in \mathbb{D}^{k,p}(E)$ ($k \geq 1$) に対し、 $\Phi = \Psi$ となることを示すには、 $D^k(\Phi - \Psi) = 0$ かつ $\int_{\mathcal{W}} D^j(\Phi - \Psi) d\mu = 0$ ($0 \leq j \leq k-1$) となることを示せばよい。この講演で利用するいくつかの等式はこの方法で証明している。

L^2 -内積を利用して、 D の共役作用素 D^* をつぎの関係式により定義する。

$$\int_{\mathcal{W}} \langle D\Phi, \Psi \rangle_{\mathcal{H} \otimes E} d\mu = \int_{\mathcal{W}} \langle \Phi, D^*\Psi \rangle_E d\mu \quad (\Phi \in \mathcal{P}).$$

命題 ([9, Theorem 5.2.1]). $D^*: \mathbb{D}^{k,p}(\mathcal{H} \otimes E) \rightarrow \mathbb{D}^{k-1,p}(E)$ は連続である。 ■

S.Watanabe により証明されたこの連続性は Malliavin 解析の根幹をなす性質である。

$$\mathbb{D}^{\infty}(E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \bigcap_{p \in (1, \infty)} \mathbb{D}^{k,p}(E)$$

とおく。 $\mathbb{D}^{k,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{D}^{\infty}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{D}^{k,p}$, $\mathbb{D}^{\infty}$ と略記する。さらに、 $(\mathbb{D}^{k,p})'$ を $\mathbb{D}^{k,p}$ の双対空間とし、

$$\mathbb{D}^{-\infty, \infty} = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \bigcap_{p \in (1, \infty)} (\mathbb{D}^{k,p})', \quad \mathbb{D}^{\infty, 1+} = \bigcap_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \bigcup_{p \in (1, \infty)} \mathbb{D}^{k,p}$$

と定める。 $\xi \in \mathbb{D}^{-\infty, \infty}$ の $\Psi \in \mathbb{D}^{\infty, 1+}$ への作用を $\xi[\Psi]$ と表わす。

$\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^N) \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^N)$ が非退化であるとは,

$$\left\{ \det \left[\left(\langle D\Phi^i, D\Phi^j \rangle_{\mathcal{H}} \right)_{1 \leq i, j \leq N} \right] \right\}^{-1} \in \bigcap_{p \in (1, \infty)} L^p(\mu)$$

が成り立つことをいう. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ を $\mathbb{R}^N$ 上の急減少関数, 緩増加超関数の全体とする. つぎのように, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ の元と Φ の合成が $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ に拡張できる.

命題 ([9, Corollary5.4.7]). $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^N) \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^N)$ が非退化であるならば, 連続な線形写像 $\mathfrak{C} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{D}^{-\infty, \infty}$ で, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ 上では関係式

$$\mathfrak{C}(v)[\Psi] = \int_{\mathcal{W}} \Psi v(\Phi) d\mu \quad (v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \Psi \in \mathbb{D}^{\infty, 1+}) \quad (\text{pullback})$$

を満たすものが存在する. ■

$\mathfrak{C}(u)$ を u の Φ によるひき戻しという. 関係式 (pullback) に倣って, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ に対しても, $\mathfrak{C}(u)$ を $u(\Phi)$ と, $u(\Phi)[\Psi]$ を

$$\int_{\mathcal{W}} \Psi u(\Phi) d\mu$$

と表すことにする.

命題 ([9, Theorem5.4.11]). $\delta_z \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ を $z \in \mathbb{R}^N$ に集中する Dirac 測度とする. 関数 $z \mapsto \int_{\mathcal{W}} \Psi \delta_z(\Phi) d\mu$ は Φ の $\Psi d\mu$ のもとでの分布密度関数である.

$$\int_{\mathcal{W}} \varphi(\Phi) \Psi d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(z) \left(\int_{\mathcal{W}} \Psi \delta_z(\Phi) d\mu \right) dz \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)). \quad \blacksquare$$

命題 ([9, Proposition5.4.13, Theorem5.4.15]). $\delta_z(\Phi)$ は $\mathcal{W}$ 上の有限測度を定める. ■

この有限測度をピン留め測度と呼び, $\delta_z(\Phi) d\mu$ と表す. 先の命題とあわせるとつぎのような条件付き期待値の表示を得る.

$$\mathbb{E}[\Psi | \Phi = z] = \left(\int_{\mathcal{W}} \Psi \delta_z(\Phi) d\mu \right) \left(\int_{\mathcal{W}} 1 \delta_z(\Phi) d\mu \right)^{-1}.$$

Malliavin 解析に加え, 2 次 Wiener カオスの元に関する事実について述べる. $\mathfrak{q}$ を 2 次 Wiener カオスの元とすれば, $\eta^{(\mathfrak{q})}(t, s)^\dagger = \eta^{(\mathfrak{q})}(s, t)$ を満たす積分核 $\eta^{(\mathfrak{q})} : [0, T]^2 \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ が存在し,

$$\mathfrak{q} = \int_0^T \left\langle \int_0^t \eta^{(\mathfrak{q})}(t, s) d\theta(s), d\theta(t) \right\rangle = \sum_{i, j=1}^d \int_0^T \left\{ \int_0^t (\eta^{(\mathfrak{q})})_j^i(t, s) d\theta^j(s) \right\} d\theta^i(t) \quad (\text{WienerChaos})$$

と表現できる. ここで, $\theta(t)(w) = w(t)(w \in \mathcal{W})$ であり, $d\theta(t) = (d\theta^1(t), \dots, d\theta^d(t))$ は Itô 積分を表す. 最右辺は行列・ベクトル表示を成分表示したものである. この表現

は K.Itô により論文「Multiple Wiener integral」(J. Math. Soc. Japan **3**(1951), 157–169) において証明された ([10] も参照). この積分核を用いて, Hilbert-Schmidt 作用素 $B^{(q)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ をつぎで定める.

$$(B^{(q)}h)'(t) = \int_0^T \eta^{(q)}(t, s)h'(s)ds \quad (h \in \mathcal{H}).$$

1.5. Ikeda et al の結果を述べよう. $B^{(q)}$ は, Volterra 作用素 $A_V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ と有限次元値域を持つ連続作用素 $A_F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ を用いて,

$$B^{(q)} = A_V + A_F$$

と分解できると仮定する. 互いに直交する $k_1, \dots, k_M \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ ($M \in \mathbb{N}$) で, それらの張る空間 $\text{span}\{k_1, \dots, k_M\}$ が A_F の値域 $R(A_F)$ を包含するものをとる. $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_M)$ とおく. $J_p \in \mathcal{H}$ を

$$J_p = (I - A_V)^{-1} \left(\sum_{j=1}^M p_j k_j \right) \quad (p = (p_1, \dots, p_M) \in \mathbb{R}^M)$$

と定義する. $0 \leq N \leq M$ に対し, $\text{span}\{k_1, \dots, k_N\}$ への直交射影を $\pi^{(N)}$ と表し, 線形写像 $\hat{J}_N \in \mathbb{R}^{M \times M}$ をつぎで定める.

$$\hat{J}_N p = \left(\langle \{I - (\pi^{(M)} - \pi^{(N)})B^{(q)}\} J_p, k_j \rangle_{\mathcal{H}} \right)_{1 \leq j \leq M}.$$

$h \in \mathcal{H}$ の Wiener 積分を $W(h)$ と表す. すなわち, $W(h) = \int_0^T \langle h'(t), d\theta(t) \rangle$ である. さらに, $W(\mathbf{k}; N) = (W(k_i))_{1 \leq i \leq N}$ とおく.

命題. つぎが成り立つ.

$$\int_{\mathcal{W}} e^q \delta_0(W(\mathbf{k}; N)) d\mu = \left(\frac{\prod_{i=N+1}^M \|k_i\|_{\mathcal{H}}^2}{(2\pi)^N \det \hat{J}_N} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \text{tr} A_F}. \quad (\text{Plücker})$$

(Plücker) は N とともにラプラス変換型積分の値が変わる様子を記述している. $2M \times M$ -

行列 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \hat{J}_M \\ \hat{J}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{(N)} \\ \mathcal{A}^{(M+N+1)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{(2M)} \end{pmatrix}$ と定めれば,

$$\hat{J}_N = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{(N)} \\ \mathcal{A}^{(M+N+1)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{(2M)} \end{pmatrix}$$

となる．よって，(Plücker) に現れる $\det \hat{J}_N$ は枠 $\mathcal{A}$ の $(1, \dots, N, M + N + 1, \dots, 2M)$ 番目の Plücker 座標となっている．

J_p の定義は，

$$(I - A_V)J_p = \sum_{j=1}^M p_j k_j$$

と書き直せる．これから，ODE が従い，それを解くことで具体的に $\hat{J}_N$ を求めることができる．実際，Kac や Lévy が扱った場合に $\int_{\mathcal{W}} e^{\lambda \mathbf{q}} \delta_0(W(\mathbf{k}; N)) d\mu$ の具体的な表現に対応する ODE はそれぞれ

$$(\text{Kac}, \mathbb{R} \text{ 上}) \quad \phi'' + \lambda \phi = 0, \quad (\text{Lévy}, \mathbb{R}^2 \text{ 上}) \quad \psi'' - \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \psi' = 0$$

となる．さらに， $d = 2$ で $\mathbf{q}$ が Gauss 過程

$$X_N(t) = \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{N-1}} ds_N \theta(s_N)$$

が囲む確率面積

$$\int_0^T \{X_N^1(t) dX_N^2(t) - X_N^2(t) dX_N^1(t)\}$$

の場合には， $2N$ 階の ODE が現われ，それを解くことで具体的な $\hat{J}_N$ が計算できる．

1.6. T et al の成果について紹介する．Hilbert 空間 E の元 e_1, e_2 に対し， $e_1 \otimes e_2 : E \rightarrow E$ を $(e_1 \otimes e_2)e = \langle e_1, e \rangle_E e_2$ ($e \in E$) と定める．これまでの話は，Cameron-Martin を除いて『 $\mathcal{H}$ の ONB $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ を用いて， $B^{(\mathbf{q})} = \sum_{n=1}^\infty a_n h_n \otimes h_n$ と固有関数分解すれば，

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathbf{q}} d\mu = \left\{ \prod_{n=1}^\infty (1 - a_n) e^{a_n} \right\}^{-\frac{1}{2}} = \{\det_2(I - B^{(\mathbf{q})})\}^{-\frac{1}{2}}$$

が成り立つ』こと，すなわち，ラプラス変換型積分の $f \equiv 1$ の場合の具体的表示に基づいている．そこには，Cameron-Martin が用いたような変数変換公式は出てこない．なお，この等式は，上の固有関数分解から $B^{(\mathbf{q})}$ の積分核 $\eta^{(\mathbf{q})}$ が

$$\eta^{(\mathbf{q})}(t, s) = \sum_{n=1}^\infty a_n [h'_n(s) \otimes h'_n(t)] \quad ((t, s) \in [0, T]^2)$$

と表現できることから，(WienerChaos) と Itô 積分の計算で

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty a_n \{W(h_n)^2 - 1\}$$

となることと $\{W(h_n); n \in \mathbb{N}\}$ は $N(0, 1)$ に従う独立同分布な確率変数列であることから得られる．

P.Malliavin との共著論文 (1997) において, 著者はつぎのような q に対する複素変数変換公式を示した.

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{i\lambda q} d\mu = \{\det_2(I - i\lambda B^{(q)})\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + L_\lambda) d\mu \quad (\text{ComplexCV})$$

ただし, $\det_2$ は正規化された行列式, $\iota: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ は恒等写像であり, $L_\lambda: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{H}$ は $B^{(q)}$ の固有関数展開を用いて, $L_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \{(1 - i\lambda a_n)^{-\frac{1}{2}} - 1\} W(h_n) h_n$ と定義する. この複素変数変換公式は, Sh.Kusuoka(1982) によって見出されたつぎの実変数変換公式を複素化することで導き出された.

命題 (実変数変換公式; [9, Theorem 5.6.1]). $F \in \mathbb{D}^\infty(\mathcal{H})$ とする.

$e^{-D^*F + r\|DF\|_{\mathcal{H} \otimes 2}^2} \in \bigcup_{p \in (1, \infty)} L^p(\mu)$ を満たす $r \in (\frac{1}{2}, \infty)$ が存在すれば, つぎが成り立つ.

$$\int_{\mathcal{W}} f(\iota + F) \det_2(I + DF) e^{-D^*F - \frac{1}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2} d\mu = \int_{\mathcal{W}} f d\mu. \quad \blacksquare$$

$B^{(q)}$ のどの固有値も零でないならば, $|\lambda| \rightarrow \infty$ としたとき漸近的に

$$\int_{\mathcal{W}} e^{i\lambda q} f d\mu \sim "f(0)" \{\det_2(I - i\lambda B^{(q)})\}^{-\frac{1}{2}}$$

となることを杉田氏との共同研究などで示した. このとき, q の停留点 ($Dq = 0$ となる点) は 0 のみとなるから, この漸近挙動は $\mathcal{W}$ 上で停留位相の原理が成り立っていることを示唆している. もちろん “ $f(0)$ ” の意味するところは問題ではある.

ここまでは $B^{(q)}$ の固有関数展開を利用した考察であったが, Girsanov 変換を利用すると Cameron-Martin の ODE を用いた具体的表示を一般化できる. 実際, $\gamma^\dagger = -\gamma$, $\delta^\dagger = \delta$ を満たす $\gamma \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$, $\delta \in C([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ に対し, $A_\zeta \in C^2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ ($\zeta \in \mathbb{C}$) を ODE

$$A_\zeta'' - \zeta \gamma A_\zeta' + \zeta(\delta - \frac{1}{2}\gamma') = 0, \quad A_\zeta(T) = I_d, \quad A_\zeta'(T) = \frac{\zeta}{2}\gamma(T)$$

の一意解とする. 著者は, 十分小な ζ に対し, つぎが成り立つことを示した.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{W}} f \exp\left(\frac{\zeta}{2} \int_0^T \{\langle \gamma(t)\theta(t), d\theta(t) \rangle + \langle \delta(t)\theta(t), \theta(t) \rangle dt\}\right) d\mu \\ &= \{\det A_\zeta(0)\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + T_{A_\zeta}) d\mu. \end{aligned}$$

ただし, $\iota: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ は恒等写像であり, $T_{A_\zeta}: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ はつぎで定める.

$$(T_{A_\zeta} w)(t) = -A_\zeta(t) \int_0^t (A_\zeta^{-1})'(s) w(s) ds \quad (t \in [0, T]).$$

稲濱氏との共同研究では, $f = 1$, γ は定数関数, $\delta = 0$ の場合のこの表示式を利用して, べき零群の熱核を計算した.

ラプラス変換型積分の具体的な表示を利用して、池田氏との共同研究において、KdV 方程式のソリトン解の期待値表示を与えた。この具体的な表示もまた Cameron-Martin の ODE を用いた表現の一般化であり、Girsanov 変換を用いて計算した。表示は以下のようなものである。 $p_i \neq p_j (i \neq j)$, $c_j > 0$ となる $p_1, \dots, p_d, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ をとる。 D を $p_1, \dots, p_d$ を対角成分とする対角行列とし、

$$\xi(t) = e^{tD} \int_0^t e^{-sD} d\theta(s) = \left(\int_0^t e^{(t-s)p_1} d\theta^1(s), \dots, \int_0^t e^{(t-s)p_d} d\theta^d(s) \right) \quad (t \in [0, T])$$

と定義する。 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$ とおき、 $\phi \in C^2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ を ODE

$$\phi'' - (D^2 + \mathbf{c} \otimes \mathbf{c})\phi = 0$$

の解とする。 $\psi = -(\phi' \phi^{-1})(T - \cdot)$ とおき、その対称部分を ψ_S , 歪対称部分を ψ_A とする。このとき、つぎが成り立つ。

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{W}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^T \langle c, \xi(t) \rangle^2 dt + \frac{1}{2} \left\langle \{ \psi_S(T) - D \} \xi(T), \xi(T) \right\rangle - \frac{1}{2} \int_0^T |\psi_A(t) \xi(t)|^2 dt \right) d\mu \\ &= \left\{ \frac{\det \phi(0) e^{-T \text{tr} D}}{\det \phi(T)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

2 プラン

前節「長い昔話」で紹介した 2 次 Wiener カオスに対するラプラス変換型積分に関する研究成果を統一的に取り扱える枠組みについて紹介することが本講演の目的である。以下のようなプランでその枠組みの構築を行う。

- ① 1 次変換から指数可積分な 2 次形式が派生することことを示す。さらに、そのような 1 次変換は逆変換を持つことを示す。
- ② 与えられた指数可積分な 2 次形式に対し、それを生み出すふた通りの 1 次変換を見出す。ひとつは平方根作用素補題を利用する平方根 1 次変換、いまひとつは積分核が Volterra 型の 1 次変換である適合 1 次変換である。さらに、それぞれに対応するラプラス変換型積分の具体的な表現を与える。
- ③ 特別な適合 1 次変換である線形適合 1 次変換に応用し以下を示す。
 - [1] 指数可積分性と Riccati 方程式の可解性 (および 2 階線型微分方程式の解の非特異性) は同値であることを示す。
 - [2] ODE の解を用いラプラス変換型積分の具体的な表現を与える。
 - [3] Feynman-Kac 密度関数の具体的な表現を与える。

3 1 次変換から派生する 2 次形式

3.1. 1 次変換。 指数可積分な 2 次形式が 1 次変換から派生することを述べる。まず、いくつかの記号を導入する。Lebesgue 測度に関し二乗可積分な $\kappa : [0, T]^2 \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ の全体

を $\mathcal{L}_2$ と表し,

$$\|\kappa\|_2 = \left(\iint_{[0,T]^2} |\kappa(t,s)|^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\kappa \in \mathcal{L}_2)$$

とおく. $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{L}_2$ を

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \eta \in \mathcal{L}_2; \eta(t,s)^\dagger = \eta(s,t) \ ((t,s) \in [0,T]^2) \right\}$$

と定める. $F_\kappa: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{H}$ ($\kappa \in \mathcal{L}_2$), $\mathbf{q}_\eta: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\eta = (\eta_j^i)_{1 \leq i,j \leq d} \in \mathcal{S}_2$) を

$$(F_\kappa)'(t) = \int_0^T \kappa(t,s) d\theta(s) \quad (t \in [0,T]),$$

$$\mathbf{q}_\eta = \int_0^T \left\langle \int_0^t \eta(t,s) d\theta(s), d\theta(t) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^d \int_0^T \left(\int_0^t \eta_j^i(t,s) d\theta^j(s) \right) d\theta^i(t)$$

と定義する. 各 $\int_0^T \kappa(t,s) d\theta(s)$ ($t \in [0,T]$) は 1 次 Wiener カオスの元であることに因み, $\iota + F_\kappa$ を **1 次変換** と呼ぶ. 2 次 Wiener カオスは集合 $\{\mathbf{q}_\eta; \eta \in \mathcal{S}_2\}$ に一致する ([10] 参照) から $\mathbf{q}_\eta$ を **2 次形式** と呼ぶ.

$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ を $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ と, 自己共役な $B \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$ の全体を $\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$ と表す. $B_\kappa \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$ ($\kappa \in \mathcal{L}_2$) を

$$(B_\kappa h)'(t) = \int_0^T \kappa(t,s) h'(s) ds \quad (t \in [0,T], h \in \mathcal{H})$$

と定める. $\eta(\kappa) \in \mathcal{S}_2$ ($\kappa \in \mathcal{L}_2$) を

$$\eta(\kappa)(t,s) = - \left\{ \kappa(t,s) + \kappa(s,t)^\dagger + \int_0^T \kappa(u,t)^\dagger \kappa(u,s) du \right\} \quad ((t,s) \in [0,T]^2)$$

と定義する. このとき,

$$B_{\eta(\kappa)} = -(B_\kappa + B_\kappa^* + B_\kappa^* B_\kappa) = I - (I + B_\kappa^*)(I + B_\kappa)$$

である. さらに,

$$\Lambda(B) = \sup_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \langle Bh, h \rangle_{\mathcal{H}} \quad (B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2}))$$

とおく. $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を B の固有値列とすれば, $\Lambda(B) = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ となる. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であるから, $\Lambda(B) \geq 0$ である.

定理 TF. $\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$ ($\kappa \in \mathcal{L}_2$) ならば, つぎが成り立つ.

$$|\det_2(I + B_\kappa)| \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_\kappa) e^{\mathbf{q}_{\eta(\kappa)}} d\mu = e^{\frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f d\mu \quad (\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{W})). \quad (\text{TF})$$

ここで $\mathcal{B}_b(\mathcal{W})$ は $\mathcal{W}$ 上の有界かつ Borel 可測な実数値関数の全体である. ■

附記. ① 後述するように, $e^{\mathbf{q}_\eta} \in L^1(\mu)$ となるためには $\Lambda(B_\eta) < 1$ となる必要かつ十分である. よって, 定理 TF は, $\mathcal{W}$ 上の変数変換公式を通じて, 1 次変換 $\iota + F_\kappa$ か

ら指数可積分な 2 次形式 $\mathbf{q}_{\eta(\kappa)}$ が派生することを示している.

② 等式 $I - B_{\eta(\kappa)} = (I + B_\kappa^*)(I + B_\kappa)$ により, $\inf_{\|h\|_{\mathcal{H}}=1} \|(I + B_\kappa)h\|_{\mathcal{H}} = 1 - \Lambda(B_{\eta(\kappa)})$ となる. したがって, $\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$ となるには, $\det_2(I + B_\kappa) \neq 0$ となることが必要かつ十分である.

定理の証明の中核をなすのはつぎの事実である.

Key facts. $\kappa \in \mathcal{L}_2$, $\eta \in \mathcal{S}_2$ とする.

Ⓐ $F_\kappa = D^*B_\kappa$ かつ $\mathbf{q}_\eta = \frac{1}{2}(D^*)^2B_\eta$ である. ここで, $B_\kappa, B_\eta \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$ を $\mathbb{D}^\infty(\mathcal{H}^{\otimes 2})$ の定数関数と考え D^* を作用させている.

Ⓑ $\{\ell_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathcal{H}$ の ONB とする. F_κ , $\mathbf{q}_\eta$ はつぎのように展開できる.

$$F_\kappa = \sum_{n,m=1}^\infty \langle B_\kappa \ell_n, \ell_m \rangle_{\mathcal{H}} (D^* \ell_n) \ell_m,$$

$$\mathbf{q}_\eta = \sum_{n,m=1}^\infty \langle B_\eta \ell_n, \ell_m \rangle_{\mathcal{H}} \{(D^* \ell_n)(D^* \ell_m) - \delta_{nm}\}.$$

Ⓒ $\lambda = \Lambda(B_\eta) < 1$ ($\eta \in \mathcal{S}_2$) ならば, つぎの評価式が成り立つ.

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\mathbf{q}_\eta} d\mu \leq \exp\left(\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{0 \vee \lambda}{3\{1 - (0 \vee \lambda)\}^3}\right\}\|\eta\|_2^2\right).$$

さらに, $e^{\mathbf{q}_\eta} \in L^1(\mu)$ となるためには $\Lambda(B_\eta) < 1$ となることが必要かつ十分である. ■

PROOF (定理 TF). π_N を $\ell_1, \dots, \ell_N$ の張る部分空間への直交射影とする ($N \in \mathbb{N}$).

(1) $B_N = \pi_N B_\kappa \pi_N$ とし, その積分核を κ_N とする. **Key facts**Ⓑ) により,

$$F_{\kappa_N} = \sum_{n,m=1}^N \langle B_\kappa \ell_n, \ell_m \rangle_{\mathcal{H}} (D^* \ell_n) \ell_m,$$

$$\mathbf{q}_{\eta(\kappa_N)} = \sum_{n,m=1}^N \langle B_{\eta(\kappa_N)} \ell_n, \ell_m \rangle_{\mathcal{H}} \{(D^* \ell_n)(D^* \ell_m) - \delta_{nm}\}$$

と展開できる.

$A_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ を $A_N = (\langle B_\kappa \ell_n, \ell_m \rangle_{\mathcal{H}})_{1 \leq n, m \leq N}$ とおく. $\ell_1, \dots, \ell_N$ の張る部分空間を $\mathbb{R}^N$ と同一視する. $(D^* \ell_1, \dots, D^* \ell_N)$ は $\mathbb{R}^N$ 上の正規分布 $N(0, I_N)$ に従うから, F_{κ_N} は, $N(0, I_N)$ もとで $\mathbb{R}^N$ -値確率変数と見なした線形写像 $I_N + A_N^\dagger$ と一致する. この同一視のもと, 写像 $x \mapsto (I_N + A_N^\dagger)x$ に対する変数変換公式から, $\kappa = \kappa_N$ とした等式 (TF) が得られる.

(2) **Key facts**Ⓒ) と $B \mapsto \Lambda(B)$ の連続性により, 十分大きい $N_0 \in \mathbb{N}$ に対し, $\{e^{\mathbf{q}_{\kappa_N}}; N \geq N_0\}$ は一様可積分となる. $\det_2, D^*$ の連続性により, $\kappa = \kappa_N$ とした等式 (TF) で $N \rightarrow \infty$ として等式 (TF) を得る. □

3.2. 逆 1 次変換. ラプラス変換型積分 $\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathbf{q}} d\mu$ の計算に等式 (TF) を利用するには, 『(i) $f(\iota + F_\kappa)$ を f に変える』, 『(ii) $\eta = \eta(\kappa)$ となる κ を見つける』というふたつの問題

を解決しなければならない。ここでは $\iota + F_\kappa$ が逆 1 次変換を持つことを示すことで (i) の問題を解決する。(ii) は次節で扱う。

写像 $\mathcal{L}_2 \ni \kappa \mapsto B_\kappa \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$ は全単射である。よって、 $\det_2(I + B_\kappa) \neq 0 \stackrel{\text{iff}}{\iff} \Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$ となる $\kappa \in \mathcal{L}_2$ に対し、つぎを満たす $\hat{\kappa} \in \mathcal{L}_2$ が唯一つ存在する。

$$B_{\hat{\kappa}} = (I + B_\kappa)^{-1} - I \left(= -(I + B_\kappa)^{-1} B_\kappa \right).$$

定理 invTF. $\Lambda(B_{\eta(\kappa)}) < 1$ ならば、つぎがいえ。

$$\textcircled{1} \quad (\iota + F_\kappa) \circ (\iota + F_{\hat{\kappa}}) = (\iota + F_{\hat{\kappa}}) \circ (\iota + F_\kappa) = \iota \quad \mu\text{-a.s.}$$

$$\textcircled{2} \quad |\det_2(I + B_\kappa)| \int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa)}} d\mu = e^{\frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\hat{\kappa}}) d\mu \quad (\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{W})). \quad \blacksquare$$

証明には、つぎの事実を用いる。

Key facts $\textcircled{D}$ $F_\kappa(\cdot + g) = F_\kappa + B_\kappa g \quad (\forall g \in \mathcal{H}) \quad \mu\text{-a.s.}$

$\textcircled{E}$ $\langle D^* A, g \rangle_{\mathcal{H}} = D^*(A^* g) \quad (A \in \mathcal{H}^{\otimes 2}, g \in \mathcal{H}). \quad \blacksquare$

PROOF (定理 invTF). $\textcircled{1}$ **Key facts** $\textcircled{D}$ により、

$$(\iota + F_\kappa) \circ (\iota + F_{\hat{\kappa}}) = \iota + F_\kappa + F_{\hat{\kappa}} + B_\kappa F_{\hat{\kappa}} \quad \mu\text{-a.s.}$$

となる。**Key facts** $\textcircled{A}$ と $\textcircled{E}$ により、各 $g \in \mathcal{H}$ に対し、

$$\begin{aligned} \langle F_\kappa + F_{\hat{\kappa}} + B_\kappa F_{\hat{\kappa}}, g \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle D^* B_\kappa + D^* B_{\hat{\kappa}}, g \rangle_{\mathcal{H}} + \langle D^* B_{\hat{\kappa}}, B_\kappa^* g \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= D^* \left[B_\kappa^* g + B_{\hat{\kappa}}^* g + B_{\hat{\kappa}}^* B_\kappa^* g \right] = D^* \left[\{(I + B_\kappa)(I + B_{\hat{\kappa}})\}^* - I \right] g = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち、 $(\iota + F_\kappa) \circ (\iota + F_{\hat{\kappa}}) = \iota \quad \mu\text{-a.s.}$ である。逆順の合成写像が ι になることも同様に示せる。

$\textcircled{2}$ 等式 (TF) の f として $f \circ (\iota + F_{\hat{\kappa}})$ をとればよい。 $\square$

4 2 次形式を生む 1 次変換

$\eta = \eta(\kappa)$ ($\eta \in \mathcal{S}_2$) となる $\kappa \in \mathcal{L}_2$ を見出す二通りの方法について説明し、それぞれに付随するラプラス変換型積分の表示について述べる。

4.1. 平方根 1 次変換. $\Lambda(B_\eta) < 1$ ($\eta \in \mathcal{S}_2$) であれば、 $I - B_\eta$ は自己共役、正定値かつ連続な線形作用素である。よって、自己共役かつ非特異な平方根作用素 $(I - B_\eta)^{\frac{1}{2}}$ をもつ。このとき、 $\kappa_S(\eta) \in \mathcal{S}_2$ を

$$B_{\kappa_S(\eta)} = (I - B_\eta)^{\frac{1}{2}} - I \left(= -\{I + (I - B_\eta)^{\frac{1}{2}}\}^{-1} B_\eta \right).$$

と定義する。平方根作用素を利用することに因み、 $\iota + F_{\kappa_S(\eta)}$ を**平方根 1 次変換**と呼ぶ。

定理 sqrtTF. $\Lambda(B_\eta) < 1$ ($\eta \in \mathcal{S}_2$) とする。つぎが成り立つ。

$$\textcircled{1} \quad \eta(\kappa_S(\eta)) = \eta.$$

$$\textcircled{2} \quad \int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta} d\mu = \{\det_2(I - B_\eta)\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_{\kappa_S(\eta)}) d\mu \quad (\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{W})). \quad \blacksquare$$

PROOF. ① $\kappa = \kappa_S(\eta) \in \mathcal{S}_2$ とおく. このとき, つぎが成り立つ.

$$I - B_{\eta(\kappa)} = (I + B_\kappa^*)(I + B_\kappa) = (I + B_\kappa)^2 = ((I - B_\eta)^{\frac{1}{2}})^2 = I - B_\eta.$$

写像 $\mathcal{L}_2 \ni \kappa \mapsto B_\kappa \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$ は全単射であるから, $\eta(\kappa) = \eta$ となる.

② $A \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$ が跡族に属せば $\det_2(I + A) = \det(I + A)e^{-\text{tr}A}$ となることから, 等式

$$|\det_2(I + B_\kappa)|^2 = \det_2((I + B_\kappa)^2)e^{\|B_\kappa\|_2^2} = \det_2(I - B_\eta)e^{\|\kappa\|_2^2}$$

が得られる. あとは定理 TF を適用すればよい. $\square$

注記. 固有関数展開 $B_\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \otimes h_n$ を用いれば $B_{\kappa_S(\eta)}$, $\widehat{B_{\kappa_S(\eta)}}$ はつぎで与えられる.

$$B_{\kappa_S(\eta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \{(1 - a_n)^{\frac{1}{2}} - 1\} h_n \otimes h_n, \quad \widehat{B_{\kappa_S(\eta)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \{(1 - a_n)^{-\frac{1}{2}} - 1\} h_n \otimes h_n.$$

4.2. 適合 1 次変換. $\eta = \eta(\kappa)$ ($\eta \in \mathcal{S}_2$) となる κ を見い出す別の方法を紹介する.

$\kappa_A(\rho) \in \mathcal{L}_2$ ($\rho \in \mathcal{S}_2$) を

$$\kappa_A(\rho)(t, s) = -\mathbf{1}_{[0, t)}(s) \rho(t, s) \quad ((t, s) \in [0, T]^2)$$

と定義する. このとき,

$$(F'_{\kappa_A(\rho)})(t) = \int_0^t \rho(t, s) d\theta(s) \quad (t \in [0, T])$$

となる. 確率過程 $\{\int_0^t \rho(t, s) d\theta(s)\}_{t \in [0, T]}$ は適合であることに因み, $\iota + F_{\kappa_A(\rho)}$ を適合 1 次変換と呼ぶ. $\kappa_A(\rho)$ は Volterra 型積分核であるから, つぎがいえ.

$$\det_2(I + B_{\kappa_A(\rho)}) = 1 \quad \text{かつ} \quad \Lambda(B_{\eta(\kappa_A(\rho))}) < 1. \quad (\text{volterra})$$

定理 adptTF. ① $\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_{\eta(\kappa_A(\rho))}} d\mu = e^{\frac{1}{4}\|\rho\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + \widehat{F_{\kappa_A(\rho)}}) d\mu \quad (\forall \rho \in \mathcal{S}_2, \forall f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{W})).$

② $\Lambda(B_\eta) < 1$ ($\eta \in \mathcal{S}_2$) ならば, 次式を満たす $\rho \in \mathcal{S}_2$ が唯一つ存在する.

$$\eta(t, s) = \rho(t, s) - \int_{t \vee s}^T \rho(t, u) \rho(u, s) du \quad ((t, s) \in [0, T]^2).$$

このとき, $\eta(\kappa_A(\rho)) = \eta$ であり, さらにつぎが成り立つ.

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta} d\mu = e^{\frac{1}{4}\|\rho\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + \widehat{F_{\kappa_A(\rho)}}) d\mu \quad (\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{W})). \quad \blacksquare$$

PROOF. ① $\|\kappa_A(\rho)\|_2^2 = \frac{1}{2}\|\rho\|_2^2$ であるから, (volterra) と定理 invTF より従う.

② $\eta(\kappa)$ と $\kappa_A(\rho)$ の定義により, $\eta(\kappa_A(\rho))$ は

$$\eta(\kappa_A(\rho))(t, s) = \rho(t, s) - \int_{t \vee s}^T \rho(t, u) \rho(u, s) du \quad ((t, s) \in [0, T]^2)$$

を満たす．よって，主張①により， ρ の存在と一意性を示せば十分である．

$\varphi \in \mathcal{S}_2$ を $\varphi = \widehat{-\eta}$ と定める．定義より， $(I - B_\eta)^{-1} - I = B_\varphi$ である．これを

$$I + B_{-\eta} = (I - B_{-\varphi})^{-1}$$

と書き直す．対応 $\mathcal{H} \ni h \leftrightarrow h' \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$ により， $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ の元を $L^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素と見なす．このとき，上式により， $-\eta$ は $B_{-\varphi}$ のレゾルベント核である．レゾルベントの上半，下半 Volterra 作用素を用いた積表示を与える Gohbelg-Krein の Special factorization (AMS Transl. **51**(1966), 155–188) を $B_{-\varphi}$ に援用すれば，

$$-\eta(t, s) = \nu(t, s) + \int_t^T \nu(t, u)\nu(u, s)du \quad (0 \leq s < t \leq T)$$

という関係式を満たす $\nu \in \mathcal{S}_2$ の存在がいえる．求める ρ は $\rho = -\nu$ で与えられる．

ρ の一意性を示す． $\eta(\kappa_A(\rho_i)) = \eta$ ($i = 1, 2$) とする．このとき，

$$\rho_1(t, s) - \rho_2(t, s) = \int_{t \vee s}^T \{\rho_1(t, u)\rho_1(u, s) - \rho_2(t, u)\rho_2(u, s)\}du \quad (\text{a.e. } (t, s) \in [0, T]^2)$$

となる．ただし，「a.e.」は Lebesgue 測度に関して「ほとんどすべての」を意味する．

$\gamma(t, s) = \rho_1(t, s) - \rho_2(t, s)$ ($(t, s) \in [0, T]^2$) とおけば，

$$\begin{aligned} |\gamma(t, s)|^2 \leq 2 \left\{ \left(\int_{t \vee s}^T |\rho_1(u, s)|^2 du \right) \left(\int_{t \vee s}^T |\gamma(t, u)|^2 du \right) \right. \\ \left. + \left(\int_{t \vee s}^T |\rho_2(u, t)|^2 du \right) \left(\int_{t \vee s}^T |\gamma(u, s)|^2 du \right) \right\} \quad (\text{a.e. } (t, s) \in [0, T]^2) \end{aligned}$$

である． $T_1 = T - \frac{T}{N}$ とし，評価式

$$\iint_{[0, a + \frac{T}{N}] \times [0, T]} |\rho_i(t, s)|^2 dt ds < \frac{1}{5} \quad (\forall a \in [0, T_1], i = 1, 2)$$

を満たす $N \in \mathbb{N}$ をとる．このとき，

$$\iint_{t \vee s \geq T_1} |\gamma(t, s)|^2 dt ds \leq \frac{4}{5} \iint_{t \vee s \geq T_1} |\gamma(t, s)|^2 dt ds$$

が成り立つ．ただし， $\iint_{t \vee s \geq T_1} \cdots$ は集合 $\{(t, s) \in [0, T]^2; t \vee s \geq T_1\}$ 上の重積分を表す．

よって， $\iint_{t \vee s \geq T_1} |\gamma(t, s)|^2 dt ds = 0$ となる．

$T_2 = T - 2\frac{T}{N}$ とおけば， T を T_1 と置き換えた同じ議論により

$$\iint_{T_2 \leq t \vee s \leq T_1} |\gamma(t, s)|^2 dt ds = 0$$

となる．この操作を繰り返せば， $\gamma = 0$ a.e. を得る．

□

附記. $\Lambda(B_\eta) < 1$ ($\eta \in \mathcal{S}_2$) とする. 定理 sqrtTF により, $\eta(\kappa_S(\eta)) = \eta$ である. また, 定理 adptTF により, $\eta(\kappa_A(\rho)) = \eta$ を満たす $\rho \in \mathcal{S}_2$ が存在する. もし $\kappa_A(\rho) = \kappa_S(\eta)$ であれば, $\kappa_A(\rho) \in \mathcal{S}_2$ となり,

$$-\mathbf{1}_{[0,t)}(s)\rho(t,s) = \kappa_A(\rho)(t,s) = \kappa_A(\rho)(s,t)^\dagger = -\mathbf{1}_{[0,s)}(t)\rho(t,s)$$

が成り立つ. これにより $\rho = 0$, よって $\eta = 0$ となる. したがって, $\eta \neq 0$ ならば, $\kappa_A(\rho) \neq \kappa_S(\eta)$ であり, $\eta(\kappa) = \eta$ を満たす 2 種類の $\kappa \in \mathcal{L}_2$ が存在する.

5 線形適合 1 次変換

定理 adptTF を特別な適合 1 次変換である線形適合 1 次変換に応用する.

5.1. 指数可積分性の同値条件. $\sigma, \chi \in C([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ とする. $\mathfrak{p}_\sigma : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ と $\sigma(\chi) \in C([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$, $\rho_\chi \in \mathcal{S}_2$ を

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_\sigma &= \int_0^T \langle \sigma(t)\theta(t), d\theta(t) \rangle, \\ \sigma(\chi)(t) &= \chi(t) - \int_t^T \chi(u)^\dagger \chi(u) du \quad (t \in [0, T]), \\ \rho_\chi(t, s) &= \mathbf{1}_{[0,t)}(s)\chi(t) + \mathbf{1}_{(t,T]}(s)\chi(s)^\dagger \quad ((t, s) \in [0, T]^2) \end{aligned}$$

と定義する. $\mathfrak{p}_\sigma = \mathfrak{q}_{\rho_\sigma}$, $\rho_{\sigma(\chi)} = \eta(\kappa_A(\rho_\chi))$ であるから, $\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)}$ は適合 1 次変換 $\iota + F_{\kappa_A(\rho_\chi)}$ から派生する. さらに,

$$(F_{\kappa_A(\rho_\chi)})'(t) = \chi(t)\theta(t) \quad (t \in [0, T])$$

となるから, $\iota + F_{\kappa_A(\rho_\chi)}$ は $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ の線形写像である. これに因み, $\iota + F_{\kappa_A(\rho_\chi)}$ を**線形適合 1 次変換**と呼ぶ.

定理 LadptTF ① $e^{\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)}} \in L^1(\mu)$ であり, つぎが成り立つ.

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)}} d\mu = e^{\frac{1}{2} \int_0^T \text{tr}[(\chi - \sigma(\chi))(t)] dt} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + \widehat{F_{\kappa_A(\rho_\chi)}}) d\mu \quad (\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{W})).$$

② 以下の 3 条件は同値である。

(i) $e^{\mathfrak{p}_\sigma} \in L^1(\mu)$.

(ii) $\sigma(\chi) = \sigma$ となる $\chi \in C([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ が存在する.

(iii) つぎの Riccati ODE を満たす $R \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ が存在する.

$$R' = -R^2 - \sigma^\dagger R - R\sigma - \sigma^\dagger \sigma, \quad R(T) = 0. \quad (\text{riccati})$$

③ (i)~(iii) が成り立てば, $\chi = R + \sigma$ であり, さらにつぎが成り立つ.

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{p}_\sigma} d\mu = e^{\frac{1}{2} \int_0^T \text{tr} R(t) dt} \int_{\mathcal{W}} f(\iota + \widehat{F_{\kappa_A(\rho_\chi)}}) d\mu \quad (\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{W})). \quad \blacksquare$$

PROOF. ① 定理の前で見たように, $\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)} = \mathfrak{q}_{\eta(\kappa_A(\rho_\chi))}$ であるから, 定理 adptTF から $e^{\mathfrak{p}_{\sigma(\chi)}} \in L^1(\mu)$ となる.

$$\|\rho_\chi\|_2^2 = 2 \int_0^T \int_t^T |\chi(u)|^2 du dt = 2 \int_0^T \text{tr}[(\chi - \sigma(\chi))(t)] dt$$

が成り立つ. ふたたび定理 adptTF を適用して変換公式を得る.

② (ii) $\Rightarrow$ (i) ①の主張から得られる.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\sigma(\chi) = \sigma$ とする. $R = \chi - \sigma$ とおく.

$$R(t) = \int_t^T \chi(u)^\dagger \chi(u) du \quad (t \in [0, T]) \quad (\text{R-}\chi)$$

となる. これより, $R^\dagger = R$ であり, 上式は

$$R(t) = \int_t^T (R(u) + \sigma(u)^\dagger)(R(u) + \sigma(u)) du \quad (t \in [0, T]) \quad (\text{riccati-int})$$

と変形できる. これは Riccati ODE (riccati) の積分表現に他ならない.

逆に, R を Riccati ODE (riccati) の解とする. R も $R^\dagger$ も (riccati) を満たすから, $R = R^\dagger$ である. $\chi = R + \sigma$ とすれば, (riccati-int) は (R- χ) に変形できる. これにより, $\sigma = \sigma(\chi)$ となる.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\mathfrak{p}_\sigma = \mathfrak{q}_{\rho_\sigma}$ であるから, 定理 adptTF により, $\eta(\kappa_A(\rho)) = \rho_\sigma$ となる $\rho \in \mathcal{S}_2$ がとれる. このとき,

$$\int_0^T \int_0^t |\sigma(t) - \rho(t, s) + \int_t^T \rho(t, u) \rho(u, s) du|^2 ds dt = 0 \quad (\text{sigma})$$

が成り立つ. $\gamma(t, s_1, s_2) = \rho(t, s_1) - \rho(t, s_2)$ とおくと, この等式からつぎが従う.

$$\int_0^T \iint_{[0, t]^2} |\gamma(t, s_1, s_2) - \int_t^T \rho(t, u) \gamma(u, s_1, s_2) du|^2 ds_1 ds_2 dt = 0.$$

定理 adptTF の証明で用いたのと同様の L^2 -局所リプシッツ性を利用すると

$$\int_0^T \iint_{[0, t]^2} |\gamma(t, s_1, s_2)|^2 ds_1 ds_2 dt = 0$$

となることがいえる. このとき,

$$\chi_0(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \rho(t, u) du$$

とおけば, $\rho(t, s) = \chi_0(t)$ a.e. $s < t$ となる. したがって, $\rho = \rho_{\chi_0}$ である. これを (sigma) に代入すれば

$$\int_0^T \left| \sigma(t) - \chi_0(t) + \int_t^T \chi_0(u)^\dagger \chi_0(u) du \right|^2 du = 0$$

となる。したがって、

$$\chi(t) = \sigma(t) + \int_t^T \chi_0(u)^\dagger \chi_0(u) du \quad (t \in [0, T])$$

と定義すれば、 $\chi \in C([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ であり、さらに $\sigma = \sigma(\chi)$ を満たす。 $\square$

σ が C^1 -級であれば、さらに別の同値条件と表示式が得られる。

定理 LadptTF2. $\sigma \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ とする。

① $\sigma_A = \frac{1}{2}(\sigma - \sigma^\dagger)$ とおき、 $S \in C^2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ を ODE

$$S'' - 2\sigma_A S' - \sigma' S = 0, \quad S(T) = I_d, \quad S'(T) = \sigma(T)$$

の唯一解とする。このとき、定理 LadptTF の 3 条件 (i)~(iii) と条件「(iv) $\det S(t) \neq 0$ ($\forall t \in [0, T]$)」は同値である。

② (i)~(iv) が成り立てば、 $\chi = S' S^{-1}$ として $\sigma = \sigma(\chi)$ となり、さらにつぎが成立する。

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{p}_\sigma} d\mu = \left\{ e^{\int_0^T \text{tr} \sigma(t) dt} \det S(0) \right\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} f(\xi_S) d\mu \quad (\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathcal{W})).$$

ただし、 $\xi_S = \{\xi_S(t) := S(t) \int_0^t S(s)^{-1} d\theta(s)\}_{t \in [0, T]}$ とする。 $\blacksquare$

PROOF. ① $\det S(t) \neq 0$ ($\forall t \in [\tau, T]$) が成り立つ $\tau \in [0, T]$ をとる。なお、 $\det S(T) = 1$ であるから、そのような τ は存在する。 $R_\tau(t) = (S' S^{-1})(t) - \sigma(t)$ ($t \in [\tau, T]$) とおく。

$$R'_\tau = S'' S^{-1} - S' S^{-1} S' S^{-1} - \sigma' = -R_\tau^2 - \sigma^\dagger R_\tau - R_\tau \sigma - \sigma^\dagger \sigma, \quad R_\tau(T) = 0$$

となる。よって、 R_τ は $[\tau, T]$ に制限した Riccati ODE (riccati) の C^1 -解である。さらに、 $[\tau, T]$ 上で、 $(\det S)' = [\text{tr}(S' S^{-1})] \det S = [\text{tr}(R_\tau + \sigma)] \det S$ となるから、つぎが成り立つ。

$$\det S(\tau) = e^{-\int_\tau^T \text{tr}[(R_\tau + \sigma)(t)] dt}. \quad (\det S)$$

上の考察から、(iv) から (iii) が従うことは明らかである。逆に、(iii) を仮定する。 $R \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ を Riccati ODE (riccati) の解とする。 $\tau_0 = \inf\{\tau \in [0, T]; \det S(t) \neq 0 \ (\forall t \in [\tau, T])\}$ とおく。Riccati ODE の解の一意性により、 $\tau > \tau_0$ ならば、 $[\tau, T]$ 上で $R_\tau = R$ となる。これと (detS) により、

$$\det S(\tau_0) = \lim_{\tau \searrow \tau_0} \det S(\tau) = e^{-\int_{\tau_0}^T \text{tr}[(R + \sigma)(t)] dt} \neq 0$$

を得る。よって、 $\tau_0 = 0$ かつ $\det S(0) \neq 0$ である。 τ_0 の定義と $\det S$ の連続性により、 $\det S(t) \neq 0$ ($\forall t \in [0, T]$) となる。

③ 主張①、②と定理 LadptTF により、 $\iota + F_{\widehat{\kappa_A(\rho_\chi)}} = \xi_S$ となることを示せばよい。連続線形写像 $\mathcal{A}_S : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ を

$$(\mathcal{A}_S w)(t) = -S(t) \int_0^t (S^{-1})'(s) w(s) ds \quad (w \in \mathcal{W}, t \in [0, T])$$

と定める． $[0, T]$ 上の部分積分を用いた初等的な計算により

$$(\iota + F_{\kappa_A(\rho_\chi)}) \circ (\iota + \mathcal{A}_S) = (\iota + \mathcal{A}_S) \circ (\iota + F_{\kappa_A(\rho_\chi)}) = \iota$$

となることが示せる．定理 invTF①とあわせると $\iota + \widehat{F_{\kappa_A(\rho_\chi)}} = \iota + \mathcal{A}_S$ μ -a.s. となる．さらに，Itô の公式により， $\iota + \mathcal{A}_S = \xi_S$ μ -a.s. が成り立つ． $\square$

5.2. Feynman-Kac 密度関数． スカラーポテンシャルだけでなくベクトルポテンシャルも含む Feynman-Kac の公式 ([21, 定理 6.22]) は，つぎのような主張である．

『 $A = (A_1, \dots, A_d) \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする．

$$P_t f(x) = \int_{\mathcal{W}} f(x + \theta(t)) \exp\left(\int_0^t \langle A(x + \theta(s)), d\theta(s) \rangle + \int_0^t V(x + \theta(s)) ds\right) d\mu$$

と定義される $\{P_t\}_{t \in [0, T]}$ は偏微分作用素

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 + \sum_{i=1}^d A_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \left\{V + \frac{1}{2}|A|^2\right\}$$

に対応する熱半群を与える．』

この積分の指数に倣って，2 次 Wiener 汎関数

$$\mathfrak{a}_{\phi, \psi}^x = \int_0^T \langle \phi(t)\{x + \theta(t)\}, d\theta(t) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T \langle \psi(t)\{x + \theta(t)\}, x + \theta(t) \rangle dt$$

を導入する．ただし， $\phi \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$, $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$, $x \in \mathbb{R}^d$ とする． $S, U, V \in C^2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ を 2 階線型 ODE

$$\mathcal{A}'' - 2\phi_A \mathcal{A}' + (\psi_S - \phi') \mathcal{A} = 0 \quad (\text{ode} \mathcal{A})$$

の解で，つぎの終端条件を満たすものとする．

$$S(T) = I_d, \quad S'(T) = \phi(T), \quad U(T) = I_d, \quad U'(T) = 0, \quad V(T) = 0, \quad V'(T) = I_d.$$

測度 $\exp(\mathfrak{a}_{\phi, \psi}^x) d\mu$ の下での $x + \theta(T)$ の分布密度関数を具体的に表現できる．

定理 FK. $\det S(t) \neq 0$ ($\forall t \in [0, T]$) かつ $\det V(0) \neq 0$ が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}(x, y) &= \frac{1}{2} \left\{ \langle \phi_S(T)y, y \rangle - \langle \phi_S(0)x, x \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle U'(0)y, x \rangle + \langle V(0)^{-1}\{x - U(0)y\}, V'(0)^\dagger x - y \rangle \right\}, \\ v_T(S) &= \int_0^T S(t)^{-1} (S(t)^{-1})^\dagger dt \end{aligned}$$

とおく．このとき，つぎが成り立つ．

$$\int_{\mathcal{W}} \exp(\mathfrak{a}_{\phi, \psi}^x) \delta_y(x + \theta(T)) d\mu = \left\{ (2\pi)^d e^{\int_0^T \text{tr} \phi_S(t) dt} \det S(0) \det v_T(S) \right\}^{-\frac{1}{2}} e^{\mathfrak{d}(x, y)}. \quad \blacksquare$$

PROOF. $\sigma \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ を

$$\sigma(t) = \phi(t) + \int_t^T \psi_S(s) ds \quad (t \in [0, T])$$

と定める. ODE (ode $\mathcal{A}$) は, つぎのように書き改められる.

$$\mathcal{A}'' - 2\sigma_A \mathcal{A}' - \sigma' \mathcal{A} = 0.$$

さらに,

$$\mathfrak{p}_\sigma^x = \int_0^T \langle \sigma(t)(x + \theta(t)), d\theta(t) \rangle$$

とおけば,

$$\mathfrak{a}_{\phi, \psi}^x = \mathfrak{p}_\sigma^x + \frac{1}{2} \left\langle \left(\int_0^T \psi_S(s) ds \right) x, x \right\rangle + \frac{1}{2} \int_0^T \left(\int_t^T \text{tr} \psi_S(s) ds \right) dt \quad (\text{a-p})$$

となる. よって, $e^{\mathfrak{p}_\sigma^x} d\mu$ のもとでの $x + \theta(T)$ の分布密度関数を求めればよい.

$\beta \in C^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$ を

$$\beta(t) = U(t)y + V(t)V(0)^{-1}\{x - U(0)y\} \quad (t \in [0, T])$$

と定義し, $h \in \mathcal{H}$ を $h(t) = \beta(t) - x$ ($t \in [0, T]$) とおく. 定義と (ode $\mathcal{A}$) により, β は

$$\beta'' - 2\sigma_A \beta' - \sigma' \beta = 0, \quad \beta(0) = x, \quad \beta(T) = y \quad (\text{ode}\beta)$$

を満たす.

$s(x, y) = \mathfrak{p}_\sigma^x(\cdot + h) - D^*h - \frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2$ とおけば, Cameron-Martin の定理により,

$$\int_{\mathcal{W}} \varphi(x + \theta(T)) e^{\mathfrak{p}_\sigma^x} d\mu = \int_{\mathcal{W}} \varphi(y + \theta(T)) e^{s(x, y)} d\mu \quad (\text{CM})$$

が成り立つ. Itô の公式により,

$$\begin{aligned} s(x, y) = \mathfrak{p}_\sigma + \int_0^T \left\langle \sigma(t)\beta(t) + \int_t^T \sigma(s)^\dagger \beta'(s) ds - \beta'(t), d\theta(t) \right\rangle \\ + \int_0^T \langle \sigma(t)\beta(t), \beta'(t) \rangle dt - \frac{1}{2} \int_0^T |\beta'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

となる. (ode β) を利用して計算すると,

$$\left(\sigma\beta + \int_\bullet^T \sigma(s)^\dagger \beta'(s) ds - \beta' \right)' = 0, \quad \langle \sigma\beta, \beta' \rangle - \frac{1}{2} |\beta'|^2 = \left\{ \langle \sigma_S \beta, \beta \rangle - \langle \beta, \beta' \rangle \right\}'$$

がいえ. よって,

$$s(x, y) = \mathfrak{p}_\sigma + \langle \sigma(T)y - \beta'(T), \theta(T) \rangle + \mathfrak{d}^{(\sigma)}(x, y)$$

である。ただし、 $\mathfrak{d}^{(\sigma)}$ は $\mathfrak{d}$ の ϕ を σ に置き換えたものである。(CM) とこれと定理 LadptTF2 より、つぎを得る。

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{p}_\sigma^x} \delta_y(x + \theta(T)) d\mu &= \int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{s}(x,y)} \delta_0(\theta(T)) d\mu = e^{\mathfrak{d}^{(\sigma)}(x,y)} \int_{\mathcal{W}} e^{\mathfrak{p}_\sigma} \delta_0(\theta(T)) d\mu \\ &= e^{\mathfrak{d}^{(\sigma)}(x,y)} \left\{ e^{\int_0^T \text{tr} \sigma(t) dt} \det S(0) \right\}^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{W}} \delta_0(\xi_S(T)) d\mu.\end{aligned}$$

$\xi_S(T) \sim N(0, v_T(S))$ であるから、この等式と (a-p) をあわせて主張を得る。 $\square$

附記. $d = 1$ のときは、Sturm-Picone の比較定理により、 $S(t) \neq 0$ ($\forall t \in [0, T]$) ならば $V(0) \neq 0$ である。

6 補遺

6.1. Cameron-Martin, Kac, Lévy 再訪. 定理 TF と Key facts を用いて、Cameron-Martin の変換公式、Kac, Lévy の無限級数展開を再現できる。

Cameron-Martin $\mathbb{F}_\phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{H}$ ($\phi \in \mathcal{L}_2$) を

$$(\mathbb{F}_\phi)'(t) = \int_0^T \phi(t, s) \theta(s) ds \quad (t \in [0, T])$$

と定める。Itô の公式により、

$$\int_0^T \phi(t, s) \theta(s) ds = \int_0^T \kappa_\phi(s) d\theta(s) \quad \left(\kappa_\phi(t, s) = \int_s^T \phi(t, u) du \right)$$

であるから、 $\mathbb{F}_\phi = F_{\kappa_\phi}$ である。なお、 $K(t, s) = \int_0^t \phi(u, s) du$ とすれば、この積分核 K から定まる Cameron-Martin の線形変換 $\mathbb{T}$ は、 $\iota + \mathbb{F}_\phi = \iota + F_{\kappa_\phi}$ と一致する。

$\Psi_\phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\Psi_\phi = - \int_0^T \left\langle \int_0^T \phi(t, s)^\dagger d\theta(t), \theta(s) \right\rangle ds - \frac{1}{2} \int_0^T \left| \int_0^T \phi(t, s) \theta(s) ds \right|^2 dt$$

と定める。 $\Lambda(B_{\eta(\kappa_\phi)}) < 1$ ならば、 B_{κ_ϕ} は跡族に属し、(TF) はつぎのように変形できる。

$$|\det(I + B_{\kappa_\phi})| \int_{\mathcal{W}} f(\iota + \mathbb{F}_\phi) e^{\Psi_\phi} d\mu = \int_{\mathcal{W}} f d\mu.$$

さらに、もし K が連続であれば、Cameron-Martin の変換公式がこの等式から導かれる。すなわち、 $D = \det(I + B_{\kappa_\phi})$ 、 $-\Phi = \Psi_\phi$ となり、 $G = \mathbf{1}_S(\iota + F_{\kappa_\phi})$ とおけば $f(\mathbb{T})\mathbf{1}_S = (fG)(\iota + F_{\kappa_\phi})$ 、 $fG = f\mathbf{1}_{\mathbb{T}(S)}$ となる。

Kac $\eta \in \mathcal{S}_2$ を $\eta(t, s) = 1 - (t \vee s)$ ($(t, s) \in [0, 1]^2$) とおく。 $D^2 \mathfrak{h} = 2B_\eta$ 、 $\int_{\mathcal{W}} D \mathfrak{h} d\mu = 0$ 、 $\int_{\mathcal{W}} \mathfrak{h} d\mu = \frac{1}{2}$ であるから、

$$\mathfrak{h} = 2\mathfrak{q}_\eta + \frac{1}{2}$$

となる. $h_n \in \mathcal{H}$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) を $h_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{(n+\frac{1}{2})\pi} \sin\left((n+\frac{1}{2})\pi t\right)$ ($t \in [0, 1]$) と定める. このとき,

$$B_\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} h_n \otimes h_n$$

となる. **Key facts**Ⓐの展開により,

$$\mathfrak{q}_\eta = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \{(D^*h_n)^2 - 1\} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} (D^*h_n)^2 - \frac{1}{4}$$

を得る. よって,

$$\mathfrak{h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} (D^*h_n)^2$$

である. $\{D^*h_n; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ は $N(0, 1)$ に従う独立同分布な確率変数列であるから, Kac の展開が再現できる.

Lévy $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし, $\eta(t, s) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{1}_{[0,t)}(s) - \mathbf{1}_{(t,2\pi]}(s) \} J$ ($(t, s) \in [0, 2\pi]^2$) とする. $D^2\mathfrak{s} = B_\eta$, $\int_{\mathcal{W}} D\mathfrak{s}d\mu = 0$, $\int_{\mathcal{W}} \mathfrak{s}d\mu = 0$ であるから,

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{q}_\eta$$

となる. $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ とし, $\mathcal{H}$ の ONB $\{h_{n;i}; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2\}$ を

$$h_{0;i}(t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e_i, \quad h_{2n;i}(t) = \frac{\cos(nt) - 1}{n\sqrt{\pi}} e_i, \quad h_{2n-1;i}(t) = \frac{\sin(nt)}{n\sqrt{\pi}} e_i$$

($t \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$) と定義する. 三角関数の積の $[0, 2\pi]$ での積分の計算により,

$$\begin{aligned} \langle B_\eta h_{0;1}, h_{2n;2} \rangle_{\mathcal{H}} &= -\langle B_\eta h_{2n;1}, h_{0;2} \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{\sqrt{2}}{n}, \\ \langle B_\eta h_{2n;1}, h_{2n-1;2} \rangle_{\mathcal{H}} &= -\langle B_\eta h_{2n-1;1}, h_{2n;2} \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

であることがいえ, さらに他の $\langle B_\eta h_{n;i}, h_{m;j} \rangle_{\mathcal{H}}$ はすべて 0 であることがいえる. これを **Key facts**Ⓐの展開に代入すると

$$\mathfrak{q}_\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ D^*h_{2n;1} (D^*h_{2n-1;2} - \sqrt{2}D^*h_{0;2}) - D^*h_{2n;2} (D^*h_{2n-1;1} - \sqrt{2}D^*h_{0;1}) \right\}$$

となる. $\{D^*h_{n;i}; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2\}$ は $N(0, 1)$ に従う独立同分布な確率変数列であるから, Lévy の展開が再現できる.

6.2. 定理 sqrtTF のピン留め測度への拡張. 定理 sqrtTF をピン留め測度に拡張する. これにより, Ikeda et al の研究成果を再現できる. $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N) \in \mathcal{H}^N$ をとる. $C(\mathbf{k}) = (\langle k_i, k_j \rangle_{\mathcal{H}})_{1 \leq i, j \leq N}$ とおき, $\det C(\mathbf{k}) \neq 0$ である, すなわち, $k_1, \dots, k_N$ は線形独立であると仮定する. $k_1, \dots, k_N$ の張る部分空間 $\text{span}\{k_1, \dots, k_N\}$ への直交射影を $\pi_{\mathbf{k}}$

と表し, $\pi_{\mathbf{k}}^\perp = I - \pi_{\mathbf{k}}$ と定める. $B_{\eta;\mathbf{k}} = \pi_{\mathbf{k}}^\perp B_\eta \pi_{\mathbf{k}}^\perp$ とし, 写像 $\mathcal{S}_2 \ni \kappa \mapsto B_\kappa \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$ の全単射性を用いて, $\eta_{\mathbf{k}} \in \mathcal{S}_2$ を, $B_{\eta_{\mathbf{k}}} = B_{\eta;\mathbf{k}}$ と定める.

$D^*\mathbf{k} = (D^*k_1, \dots, D^*k_N)$ とおく. $D^*\mathbf{k} \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^N)$ であり, さらに非退化である. $f = p(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathcal{P}$ に対し, $(\pi_{\mathbf{k}}^\perp)_* f : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ をつぎで定める.

$$(\pi_{\mathbf{k}}^\perp)_* f = p(D^*(\pi_{\mathbf{k}}^\perp \ell_1), \dots, D^*(\pi_{\mathbf{k}}^\perp \ell_n)).$$

定理 PsqrtTF $\Lambda(B_\eta) < 1$ ($\eta \in \mathcal{S}_2$) ならば, つぎが成り立つ.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta} \delta_0(D^*\mathbf{k}) d\mu &= \{(2\pi)^N \det_2(I - B_{\eta;\mathbf{k}}) \det C(\mathbf{k})\}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \text{tr}(\pi_{\mathbf{k}} B_\eta \pi_{\mathbf{k}})} \\ &\quad \times \int_{\mathcal{W}} ((\pi_{\mathbf{k}}^\perp)_* f)(\iota + \widehat{F_{\kappa_S(\eta_{\mathbf{k}})}}) d\mu \quad (\forall f \in \mathcal{P}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

PROOF. $\widehat{k}_1, \dots, \widehat{k}_N$ を $\text{span}\{k_1, \dots, k_N\}$ の ONB とし, $\widehat{\mathbf{k}} = (\widehat{k}_1, \dots, \widehat{k}_N)$ とおけば,

$$\delta_0(D^*\mathbf{k}) = \{\det C(\mathbf{k})\}^{-\frac{1}{2}} \delta_0(D^*\widehat{\mathbf{k}})$$

となる. $\pi_{\mathbf{k}} = \pi_{\widehat{\mathbf{k}}}$, $B_{\eta;\mathbf{k}} = B_{\eta;\widehat{\mathbf{k}}}$ であるから, $k_1, \dots, k_N$ は正規直交系であるとしてよい.

$\{h_n\}_{n=1}^\infty$ を $\pi_{\mathbf{k}}^\perp(\mathcal{H})$ の正規直交基底で $B_{\eta;\mathbf{k}}$ を対角化するものとする.

$$B_\eta = B_{\eta;\mathbf{k}} + \pi_{\mathbf{k}}^\perp B_\eta \pi_{\mathbf{k}} + \pi_{\mathbf{k}} B_\eta \pi_{\mathbf{k}}^\perp + \pi_{\mathbf{k}} B_\eta \pi_{\mathbf{k}}$$

であるから, **Key fact**⑥により,

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_\eta &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \langle B_\eta h_n, h_n \rangle_{\mathcal{H}} \{(D^*h_n)^2 - 1\} + \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^N \langle B_\eta h_n, k_j \rangle_{\mathcal{H}} (D^*h_n)(D^*k_j) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \langle B_\eta k_i, k_j \rangle_{\mathcal{H}} \{(D^*k_i)(D^*k_j) - \delta_{ij}\} \end{aligned}$$

となる. $D^*k_j = 0$ ($\delta_0(D^*\mathbf{k}) d\mu$ -a.e.) であるから, つぎが成り立つ.

$$\mathfrak{q}_\eta = \mathfrak{q}_{\eta_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{2} \text{tr}(\pi_{\mathbf{k}} B_\eta \pi_{\mathbf{k}}) \quad (\delta_0(D^*\mathbf{k}) d\mu\text{-a.e.})$$

さらに, $f = (\pi_{\mathbf{k}}^\perp)_* f$ ($\delta_0(D^*\mathbf{k}) d\mu$ -a.e.) である. よって, つぎの変形を得る.

$$\int_{\mathcal{W}} f e^{\mathfrak{q}_\eta} \delta_0(D^*\mathbf{k}) d\mu = e^{-\frac{1}{2} \text{tr}(\pi_{\mathbf{k}} B_\eta \pi_{\mathbf{k}})} \int_{\mathcal{W}} ((\pi_{\mathbf{k}}^\perp)_* f) e^{\mathfrak{q}_{\eta_{\mathbf{k}}}} \delta_0(D^*\mathbf{k}) d\mu.$$

被積分関数 $((\pi_{\mathbf{k}}^\perp)_* f) e^{\mathfrak{q}_{\eta_{\mathbf{k}}}}$ と $D^*\mathbf{k}$ は独立であるから,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}} ((\pi_{\mathbf{k}}^\perp)_* f) e^{\mathfrak{q}_{\eta_{\mathbf{k}}}} \delta_0(D^*\mathbf{k}) d\mu &= \int_{\mathcal{W}} ((\pi_{\mathbf{k}}^\perp)_* f) e^{\mathfrak{q}_{\eta_{\mathbf{k}}}} d\mu \int_{\mathcal{W}} \delta_0(D^*\mathbf{k}) d\mu \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathcal{W}} ((\pi_{\mathbf{k}}^\perp)_* f) e^{\mathfrak{q}_{\eta_{\mathbf{k}}}} d\mu \end{aligned}$$

となる．定理 sqrtTF を適用すれば，主張が得られる． $\square$

6.3. Girsanov の定理再訪． $\rho \in \mathcal{S}_2$ とし， $\kappa = \kappa_A(\rho)$ とおく．定理 adptTF①により，

$$\int_{\mathcal{W}} f(\iota + F_\kappa) e^{q_{\eta(\kappa)}} d\mu = e^{\frac{1}{4}\|\rho\|_2^2} \int_{\mathcal{W}} f d\mu$$

が成り立つ． $D^2 q_{\eta(\kappa)}$ の計算と D^* は Itô 積分の拡張であること ([9, Theorem5.3.3]) により，

$$q_{\eta(\kappa)} = -D^* F_\kappa - \frac{1}{2}\|F_\kappa\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2 = -\int_0^T \langle u(t), d\theta(t) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T |u(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\|\kappa\|_2^2$$

となることが証明できる．ただし， $u(t) = \int_0^t \rho(t, s) d\theta(s)$ とする．これにより，上の変換公式はつぎのような Girsanov の定理の主張に書き改められる．

$$\int_{\mathcal{W}} f\left(\theta + \int_0^\bullet u(t) dt\right) \exp\left(-\int_0^T \langle u(t), d\theta(t) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T |u(t)|^2 dt\right) d\mu = \int_{\mathcal{W}} f d\mu.$$

Girsanov の定理が成り立つための十分条件として，Novikov 条件，Kazamaki 条件がよく知られている．Novikov 条件は，「 $\exp[\frac{1}{2} \int_0^T |u(t)|^2 dt] \in L^1(\mu)$ 」という条件である．これは「 $\|B_\kappa\|_{\text{op}} < 1$ 」と同値となる．Kazamaki 条件は「 $\{\exp[\frac{1}{2} \int_0^t \langle u(t), d\theta(t) \rangle]\}_{t \in [0, T]}$ は一様可積分である」という条件である．これは「 $\Lambda(B_\rho) < 2$ 」と同値となる． $B_\rho = B_\kappa + B_\kappa^*$ であるから，

$$\Lambda(B_\rho) \leq 2\Lambda(B_\kappa) \leq 2\|B_\kappa\|_{\text{op}}$$

となる．よって，「Novikov 条件が成り立てば，Kazamaki 条件が成り立つ」というよく知られた事実 ([11] 参照) が再確認できる．

参考文献

- [1] K. Hara and N. Ikeda. Quadratic Wiener Functionals and dynamics on Grassmannians. Bull. Sci. math. **125** (2001), 481–528.
- [2] N. Ikeda, S. Kusuoka, and S. Manabe. Lévy’s stochastic area formula for Gaussian processes. Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), 329–360.
- [3] N. Ikeda, S. Kusuoka, and S. Manabe. Lévy’s stochastic area formula and related problems. Proc. Pure. Math. AMS **57** (1995) 281–305.
- [4] N. Ikeda S. Manabe. Asymptotic formulae for stochastic oscillatory integrals. in: Elworthy K.D., Ikeda N. (Eds.), Proceeding of the Taniguchi International Symposium on Asymptotic Problems in Probability Theory, Pitman Research Notes in Math. Series **284**, Longman, Essex, 1993.
- [5] N. Ikeda and S. Manabe. Van Vleck-Pauli formula for Wiener integrals and Jacobi fields. in: Itô’s Stochastic Calculus and Probability Theory, Springer, 1996, pp. 141–156.
- [6] N. Ikeda and S. Taniguchi. Quadratic Wiener functionals, Kalman-Bucy filters, and the KdV equation. In “Stochastic Analysis and Related Topics”, H.Kunita, S.Watanabe, Y.Takahashi eds. Advanced Studies in Pure Mathematics **41**, 2004, Math. Soc. Japan, Tokyo. 167–187.

- [7] Y. Inahama and S. Taniguchi. Heat trace asymptotics on equiregular sub-Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan* **72** (2020), 1049–1096.
- [8] P. Malliavin and S. Taniguchi. Analytic Functions, Cauchy Formula, and Stationary Phase on a Real Abstract Wiener Space. *Jour. Funct. Anal.* **143** (1997), 470–528.
- [9] H. Matsumoto and S. Taniguchi. *Stochastic Analysis—Itô and Malliavin calculus in tandem*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2017.
- [10] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. 2nd ed. Springer, New York, 2006.
- [11] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Corrected third printing of the third edition. Springer, Berlin, 2005.
- [12] H. Sugita and S. Taniguchi. Oscillatory integrals with quadratic phase function on a real abstract Wiener space. *J. Funct. Anal.* **155** (1998), 229–262.
- [13] H. Sugita and S. Taniguchi. A remark on stochastic oscillatory integrals with respect to a pinned Wiener measure. *Kyushu J. Math.* **53** (1999), 151–162.
- [14] S. Taniguchi. Stochastic oscillatory integrals with quadratic phase functions and Jacobi equations. *Probab. Theory Relat. Fields* **114** (1999), 291–308.
- [15] S. Taniguchi. Lévy’s stochastic area and the principle of stationary phase. *J. Funct. Anal.* **172** (2000), 165–176.
- [16] S. Taniguchi. On the Jacobi field approach to stochastic oscillatory integrals with quadratic phase function. *Kyushu Jour. Math.* **61** (2007), 191–208.
- [17] S. Taniguchi. Transformations and quadratic forms on Wiener spaces. *Kyushu Jour. Math.* **78** (2024), 395–412.
- [18] S. Taniguchi. Transformations of order one and quadratic forms on Wiener spaces. To appear in *Kyushu Jour. Math* in 2025.
- [19] S. Taniguchi. Adapted transformations of order one and quadratic forms on Wiener spaces. To appear in *Kyushu Jour. Math* in 2026.
- [20] S. Taniguchi. Quadratic Wiener functionals —translations and quadratic forms—. Private but able-to-offer note in progress. 163 pages.
- [21] 谷口説男, 確率微分方程式, 共立出版, 2016.