

Affine process に対する表現公式と部分積分公式

田村 勇真* (立命館大学)

本講演では、次の確率微分方程式で定義される拡散型の affine process を扱う。ただし初期値 x は非負の実数であるとし、この場合 X^x は非負の過程であると考えてよい：

$$dX_t^x = \sqrt{\alpha X_t^x} dW_t + (\beta X_t^x + b)dt, \quad X_0^x = x.$$

ここで、 W は 1 次元標準 Brown 運動であり、 $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, b \geq 0$ は定数のパラメータである。拡散型 affine process のクラスは、代表的な金利モデルである Cox–Ingersoll–Ross (CIR) モデルを含むため、数理ファイナンスにおいて重要である。一方で、平方根関数の導関数は原点付近で発散するという点が、その扱いを難しくしている。

また、拡散型 affine process は、パラメータによって境界 0 に対して異なる振る舞いをする。おおまかに述べると、「吸収的」「反射的」「到達しない」という類型に分類できる [1]。

本研究では、テスト関数 f に対し、期待値の初期値 x に関する微分

$$\partial_x E[f(X_T^x)]$$

の表現公式および部分積分公式を導出する。この偏微分は、数理ファイナンスにおける「オプションのデルタ」に対応する。デルタは、証券会社がリスク管理をする際に利用される重要な指標であるため、今回得られた公式は応用上の実用可能性を持つ。

その公式を正確に述べると次のようになる。ただし、 D はパラメータの全体の空間 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ であり、 $\hat{f}$ は f の Fourier 変換である。

定理. $t \in \mathbb{R}_{>0}$ かつ $(\alpha, \beta, b) \in D$ とする。さらに、 X^x および $X^{1,x}$ をそれぞれパラメータ (α, β, b) および $(\alpha, \beta, b + \alpha/2)$ の、初期値が $x \in \mathbb{R}_{>0}$ である拡散型 affine process とする。このとき、 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ かつ $f(X_t^x), f(X_t^{1,x}) \in L^1(\Omega)$ を満たす $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して次が成り立つ：

$$\partial_x E[f(X_t^x)] = \begin{cases} \frac{2}{\alpha t} (E[f(X_t^{1,x})] - E[f(X_t^x)]); & \text{if } \beta = 0, \\ \frac{2\beta e^{\beta t}}{\alpha(e^{\beta t} - 1)} (E[f(X_t^{1,x})] - E[f(X_t^x)]); & \text{if } \beta \neq 0. \end{cases}$$

定理. $t \in \mathbb{R}_{>0}$ かつ $(\alpha, \beta, b - \alpha/2) \in D$ とする。さらに、 X^x および $X^{-1,x}$ をそれぞれパラメータ (α, β, b) および $(\alpha, \beta, b - \alpha/2)$ の、初期値が $x \in \mathbb{R}_{>0}$ である拡散型の affine process とする。このとき、 $f, f', \hat{f}, \hat{f}' \in L^1(\mathbb{R})$ かつ $f'(X_t^x), f(X_t^x), f(X_t^{-1,x}) \in L^1(\Omega)$ を満たす $f \in C^1(\mathbb{R})$ に対して次が成り立つ：

$$E[f'(X_t^x)] = \begin{cases} \frac{2}{\alpha t} (E[f(X_t^x)] - E[f(X_t^{-1,x})]); & \text{if } \beta = 0, \\ \frac{2\beta}{\alpha(e^{\beta t} - 1)} (E[f(X_t^x)] - E[f(X_t^{-1,x})]); & \text{if } \beta \neq 0. \end{cases}$$

* Email: ytamura11029@gmail.com

この2つの公式に関して、パラメータによって変わる0の周りでの振る舞いにかかわらず統一的な議論によって証明されたことは興味深い。また、左辺の affine process に対して、右辺にはそれとはパラメータの異なる affine process が現れることも特徴的である。

さらに、この2つの公式を組み合わせることで次の公式が得られる。

系. $t \in \mathbb{R}_{>0}$ かつ $(\alpha, \beta, b) \in D$ とする。さらに、 X^x および $X^{1,x}$ をそれぞれパラメータ (α, β, b) および $(\alpha, \beta, b + \alpha/2)$ の、初期値が $x \in \mathbb{R}_{>0}$ である拡散型の affine process とする。このとき、 $f, f', \hat{f}, \hat{f}' \in L^1(\mathbb{R})$ かつ $f'(X_t^{1,x}), f(X_t^x), f(X_t^{1,x}) \in L^1(\Omega)$ を満たす $f \in C^1(\mathbb{R})$ に対して次が成り立つ：

$$\partial_x E[f(X_t^x)] = e^{\beta t} E[f'(X_t^{1,x})].$$

左辺の偏微分は、数理ファイナンスにおいて「デルタ」を表すのであった。この公式は、それを具体的に数値計算する際に、偏微分の値の計算を通常の期待値の計算に置き換えることができることを示している。数値計算において、後者の方がより簡単な問題であるから、この公式は実務上の計算の高速化に寄与し得る。

さらに、次のような「他のパラメータに関する微分」に関する結果も報告する：

命題. $t \in \mathbb{R}_{>0}$ かつ $(\alpha, \beta, b) \in D$ とする。さらに、 $i = 0, 1, 2$ に対して $X^{i,x}$ をパラメータ $(\alpha, \beta, b + i\alpha/2)$ の、初期値が $x \in \mathbb{R}_{>0}$ の拡散型 affine process とする。このとき、 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ かつ $f(X_t^{i,x}) \in L^1(\Omega)$, $i = 0, 1, 2$ を満たす $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して、 $\beta \neq 0$ のとき次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \partial_\beta E[f(X_t^{0,x})] &= \frac{2xe^{\beta t}(\beta t - (e^{\beta t} - 1))}{\alpha(e^{\beta t} - 1)^2} E[f(X_t^{2,x})] \\ &\quad + \frac{2}{\alpha(e^{\beta t} - 1)} \left(b \frac{\beta t e^{\beta t} - (e^{\beta t} - 1)}{\beta} + \beta t x e^{\beta t} \right) E[f(X_t^{1,x})] \\ &\quad - \frac{2(\beta t e^{\beta t} - (e^{\beta t} - 1))}{\alpha(e^{\beta t} - 1)} \left(\frac{b}{\beta} + \frac{x e^{\beta t}}{e^{\beta t} - 1} \right) E[f(X_t^{0,x})]. \end{aligned}$$

$\beta = 0$ のときは次が成り立つ：

$$\partial_\beta E[f(X_t^{0,x})] \Big|_{\beta=0} = -\frac{x}{\alpha} E[f(X_t^{2,x})] + \frac{2}{\alpha} \left(\frac{bt}{2} - x \right) E[f(X_t^{1,x})] + \frac{1}{\alpha} (bt - x) E[f(X_t^{0,x})].$$

また、本講演ではこれらの公式の発見の端緒となった squared Bessel process に関する考察についても述べる。

なお、本講演の内容は [2] に基づく。これは Arturo Kohatsu-Higa 氏（立命館大学）との共同研究である。

参考文献

- [1] M. Jeanblanc, M. Yor, and M. Chesney, *Mathematical Methods for Financial Markets*. London: Springer. (2009)
- [2] A. Kohatsu-Higa and Y. Tamura: Representation and Integration by Parts Formulas for Affine Processes. *Asia-Pac. Financ. Mark.* available online. (2025)