

Lyapunov exponents and growth indices for fractional stochastic heat equations with space-time Lévy white noise

塩沢 裕一 (同志社大学)*

本講演は Jian Wang 氏 (Fujian Normal University) との共著論文 (arXiv:2509.23534) に基づく. 実数 $\alpha \in (0, 2]$ を固定し, $-(-\Delta)^{\alpha/2}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の分数べきラプラス作用素とする. u_0 を $\mathbb{R}^d$ 上の有界ボレル可測関数とする. 本講演では, 時空レビ白色ノイズ $\Lambda = \Lambda(dt, dx)$ をもつ分数べき確率熱方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial X(t, x)}{\partial t} = -(-\Delta)^{\alpha/2} X(t, x) + \sigma(X(t, x)) \dot{\Lambda}(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \\ X(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (1)$$

の解について, モーメントの増大度に関する性質を調べる.

最初に方程式 (1) の定式化を述べる. λ は $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の非自明な正值ボレル測度であって, $\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (1 \wedge |z|^2) \lambda(dz) < \infty$ をみたすとする. μ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義されたポアソンランダム測度であって, その強度測度は $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 上の直積測度 $\nu(dt, dx, dz) = dt dx \lambda(dz)$ であるとする. このとき, $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上のランダム測度 $\Lambda(dt, dx)$ を次で定義する:

$$\Lambda(dt, dx) = \int_{0 < |z| < 1} z(\mu - \nu)(dt, dx, dz) + \int_{|z| \geq 1} z \mu(dt, dx, dz).$$

関数 $q = q_t(x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow (0, \infty)$ は分数べきラプラス作用素 $-(-\Delta)^{\alpha/2}$ に対応する熱核とし, 関数 $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はリプシッツ連続とする.

可測関数 $X = X(t, x) : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ が方程式 (1) の軟解であるとは, X は可予測であって次の等式が P -a.s. で成立するときをいう:

$$X(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} q_{t-s}(x-y) u_0(y) dy + \int_{[0, t) \times \mathbb{R}^d} q_{t-s}(x-y) \sigma(X(s, y)) \Lambda(ds, dy), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d.$$

$p \geq 0$ に対して Lyapunov 指数 $\bar{\gamma}(p)$, $\underline{\gamma}(p)$ をそれぞれ次で定義する:

$$\bar{\gamma}(p) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \log E[|X(t, x)|^p], \quad \underline{\gamma}(p) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \log E[|X(t, x)|^p].$$

さらに (指数型) 増大指数 $\bar{\lambda}(p)$, $\underline{\lambda}(p)$ をそれぞれ次で定義する:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(p) &= \inf \left\{ \eta > 0 : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sup_{|x| \geq e^{\eta t}} \log E[|X(t, x)|^p] < 0 \right\}, \\ \underline{\lambda}(p) &= \sup \left\{ \eta > 0 : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sup_{|x| \geq e^{\eta t}} \log E[|X(t, x)|^p] > 0 \right\}. \end{aligned}$$

*本研究は JSPS 科研費 22K18675, 23K25773 の助成を受けたものです.

定義より, 任意の $p \geq 0$ に対して $\underline{\gamma}(p) \leq \overline{\gamma}(p)$, $\underline{\lambda}(p) \leq \overline{\lambda}(p)$ が成立する. Lyapunov 指数は軟解のモーメントの指数増大度を与える. 一方, 増大指数は軟解 $X(t, x)$ のモーメントが正の指数増大度をもつような最も遠い場所の情報を与える.

Conus-Khoshnevisan [3] は, 時空ガウス型白色ノイズをもつ 1 次元確率熱方程式であって, その主要部が指数モーメント有限なレビ過程の生成作用素であるときに線形増大指数を定義した. 彼らはさらに, 初期関数が指数減衰するような条件の下で, $p \geq 2$ のときに線形増大指数が正かつ有限であることを示した. ただし, 線形増大指数は, $\overline{\lambda}(p)$, $\underline{\lambda}(p)$ の定義において $|x| \geq e^{\eta t}$ を $|x| \geq \alpha t$ に置き換えたものである. 一方, Chen-Dalang [1] は, 時空ガウス型白色ノイズをもつ分数べき確率熱方程式に対して指数型増大指数を定義し, 初期関数が多項式減衰するような条件の下で, $\alpha > d = 1$ かつ $p \geq 2$ のときに指数型増大指数が正かつ有限であることを示した. 分数べきラプラス作用素 $-(-\Delta)^{\alpha/2}$ に対する熱核の無限遠方での減衰度は, $\alpha = 2$ のときは指数的であり, $0 < \alpha < 2$ のときは多項式的である. この減衰度の違いが, [3, 1] における増大指数の定義に反映されている.

Chong-Kevei [2] は, 時空レビ白色ノイズをもつ d 次元確率熱方程式であって, その主要部がラプラス作用素であるときに, ある $p_0 \in [1, 1 + 2/d]$ が存在して, $p \in (p_0, 1 + 2/d)$ ならば線形増大指数が正かつ有限であることを示した. 彼らはさらに, $d = 1$ のときは $p_0 = 1$ ととれることも示した.

本講演では, $\alpha > d = 1$ かつ $p \in [2, 1 + \alpha)$ のときに, Chong-Kevei [2] の結果を方程式 (1) に拡張する. 以下では $\alpha > d = 1$ とする. さらに, 測度 λ は対称であって, ある $p \in [1, 1 + \alpha)$ に対して次が成立することを仮定する:

$$\int_{\mathbb{R}} |z|^p \lambda(dz) < \infty.$$

定理 1. $X(t, x)$ を方程式 (1) の軟解とし, 関数 σ は $\inf_{w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |\sigma(w)|/|w| > 0$ をみたすとする.

(1) $\inf_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) > 0$ ならば, 任意の $p \in (1, 1 + \alpha)$ に対して $0 < \underline{\gamma}(p) \leq \overline{\gamma}(p) < \infty$.

(2) $\sigma(0) = 0$ と仮定し, 初期関数 u_0 は以下の 2 条件をみたすとする.

- ある $C_0 > 0$, $c \in (0, \alpha)$ が存在して, $0 \leq u_0(x) \leq C_0(1 + |x|)^{-c}$ ($x \in \mathbb{R}^d$) が成立する.
- 集合 $\{x \in \mathbb{R} : u_0(x) > 0\}$ は正のルベーク測度をもつ.

このとき, 任意の $p \in [2, 1 + \alpha)$ に対して $0 < \underline{\lambda}(p) \leq \overline{\lambda}(p) < \infty$.

定理 1 (1) より, 初期関数が一様に正ならば軟解のモーメントは指数増大することが分かる. 定理 1 (2) より, 初期関数が遠方で多項式減衰するときも, 軟解のモーメントは遠方でも指数増大し得ることが分かる. ちなみに, 定理 1 (2) の設定の下では, $p \in (1, 2)$ のときも $\overline{\lambda}(p) < \infty$ は成立するが, 指数型増大指数の正值性は未解明である.

注意 2. 定理 1 の設定の下, 任意の $t > 0$ と $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $E[|X(t, x)|^{1+\alpha}] = \infty$ が成立することが分かる. 特に $X(t, x)$ は $(1 + \alpha)$ 次以上のモーメントをもたない.

参考文献

- [1] L. Chen and R. C. Dalang, *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.* **3** (2015), 360–397.
- [2] C. Chong and P. Kevei, *Ann. Prob.* **47** (2019), 1911–1948.
- [3] D. Conus and D. Khoshnevisan, *Probab. Theory Related Fields* **152** (2012), 681–701.