

A central limit theorem for the stochastic cable equation

東京都立大学 西野 颯馬

1 Introduction

確率ケーブル方程式とは、次の確率偏微分方程式 (SPDE) である：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u + \sigma(u) \dot{W} \quad \text{on } [0, T] \times [0, L] \quad (1)$$

ここで、 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ は定数であり、 $\dot{W}$ は $[0, T] \times [0, L]$ 上の時空ホワイトノイズ．初期条件は $u(0, x) = u_0(x) = 1$ として、境界条件は Dirichlet/Neumann/周期的境界条件のいずれかが課されているものとする．さらに、 σ は大域的リプシッツ連続関数と仮定する．Walsh('86) において、この SPDE は一意な軟解をもつことが示されており、この解 $u(t, x)$ はホワイトノイズから生成されるフィルトレーションに適合し、 $E[u(t, x)^2] < \infty$ をみたす．さらに、この軟解は Itô-Walsh 積分を用いた次の表式をもつ：

$$u(t, x) = \int_0^L u_0(y) G_t(x, y) dy + \int_0^t \int_0^L G_{t-s}(x, y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \quad (2)$$

ここで、 $G_t(x, y)$ は対応する PDE のグリーン関数 (基本解) である．この解 $u(t, x)$ について、空間 $[0, L]$ に渡って平均をとって、 $L \rightarrow \infty$ における漸近挙動を考察する．具体的には、次の空間平均を考える：

$$F_L(t) := \frac{1}{L} \int_0^L \{u(t, x) - E[u(t, x)]\} dx. \quad (3)$$

2 Main results

確率変数 X, Y に対して、全変動距離 d_{TV} を次のように定める：

$$d_{TV}(X, Y) = \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(X \in B) - P(Y \in B)|$$

また、 $d_{TV}(F, \mathcal{N}(0, 1))$ によって、確率変数 F と、標準正規分布に従う確率変数との全変動距離を表すとする．一つ目の主結果は時間 $t \in [0, T]$ を固定したときの空間平均 $F_L(t)$ についてのものである．

定理 1. $\sigma(1) \neq 0$ を仮定する．このとき、任意の $t > 0$ に対して、実数 $c = c(t) > 0$ が存在して、任意の $L \geq 1$ に対して、

$$d_{TV}\left(\frac{F_L(t)}{\sqrt{\text{Var}(F_L(t))}}, \mathcal{N}(0, 1)\right) \leq \frac{c}{\sqrt{L}} \quad (4)$$

が成り立つ．

上記の主結果において、 $\sigma(1) \neq 0$ から $\text{Var}(F_L(t)) > 0$ が保証されることに注意．

次に、さらなる結果のための新たな仮定を導入する．

仮定 1. ある非負値可測関数 f_σ が存在して、任意の $T > 0$, $f_\sigma \in L^1([0, T])$ と任意の $t \in [0, T]$ に対して、

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L E[\sigma(u(t, x))^2] dx = f_\sigma(t)$$

が成り立つ．

上記の仮定は、 $\alpha = 0, \beta = 1$ かつ $\sigma(u) = u$ の場合に Pu('22) によって解 $u(t, x)$ の Wiener カオス展開を用いて成り立つことが示された。本研究においては、 $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$ かつ $\sigma(u) = \sigma_1 u + \sigma_0$ (σ_1, σ_0 は定数) の場合に、同様の手法で証明を与えた。この仮定を課すことで、次の主結果を得る。

定理 2. $T > 0$ を固定する。仮定 1 が成り立つとする。このとき、 $L \rightarrow \infty$ において、

$$\left(\sqrt{L} F_L(t) \right)_{t \in [0, T]} \rightarrow \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \sqrt{f_\sigma(s)} \, dW_s \right)_{t \in [0, T]}$$

となる。ここで、 $f_\sigma(t)$ は仮定 1 における極限、 $W = \{W_s\}_{s \in [0, T]}$ は標準 1 次元 Brown 運動であり、上記の収束は連続関数の空間 $C([0, T])$ における法則収束である。

上記の汎関数中心極限定理を証明する際に、共分散構造の収束を議論する必要があるため、仮定 1 が必要となる。他方で、定理 1 においては、固定した時刻 $t \in [0, T]$ における空間平均 $F_L(t)$ を考えているため、全変動距離を上から評価すればよいということも合わさって、仮定 1 は不要である。

これらの主結果を証明する際に Malliavin–Stein method を用いた。定理 1 については、 $\mathbb{R}$ 値確率変数に対する Malliavin–Stein method によって直接示した。定理 2 については、確率ベクトルに対する Malliavin–Stein method によって有限次元分布の収束を (共分散の収束を通して) 示して、モーメント不等式から得られる緊密性と合わせて、汎関数としての収束を示した。